

POLIEDROS REGULARES Y ARQUIMEDIANOS

Láminas 26 al 38

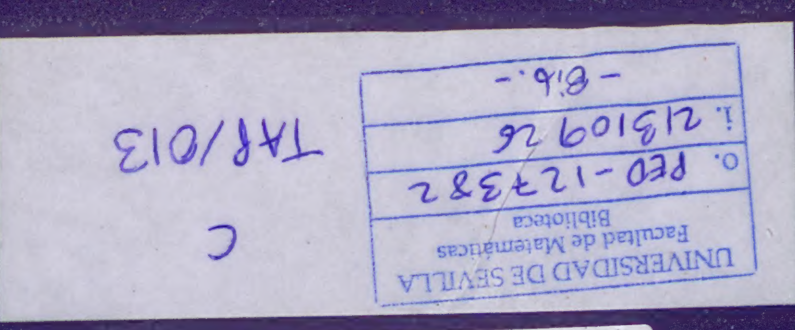




Lámina 26	POLIEDROS DERIVADOS DE LOS REGULARES A) Por proyección de los centros de caras.	26

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un exaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

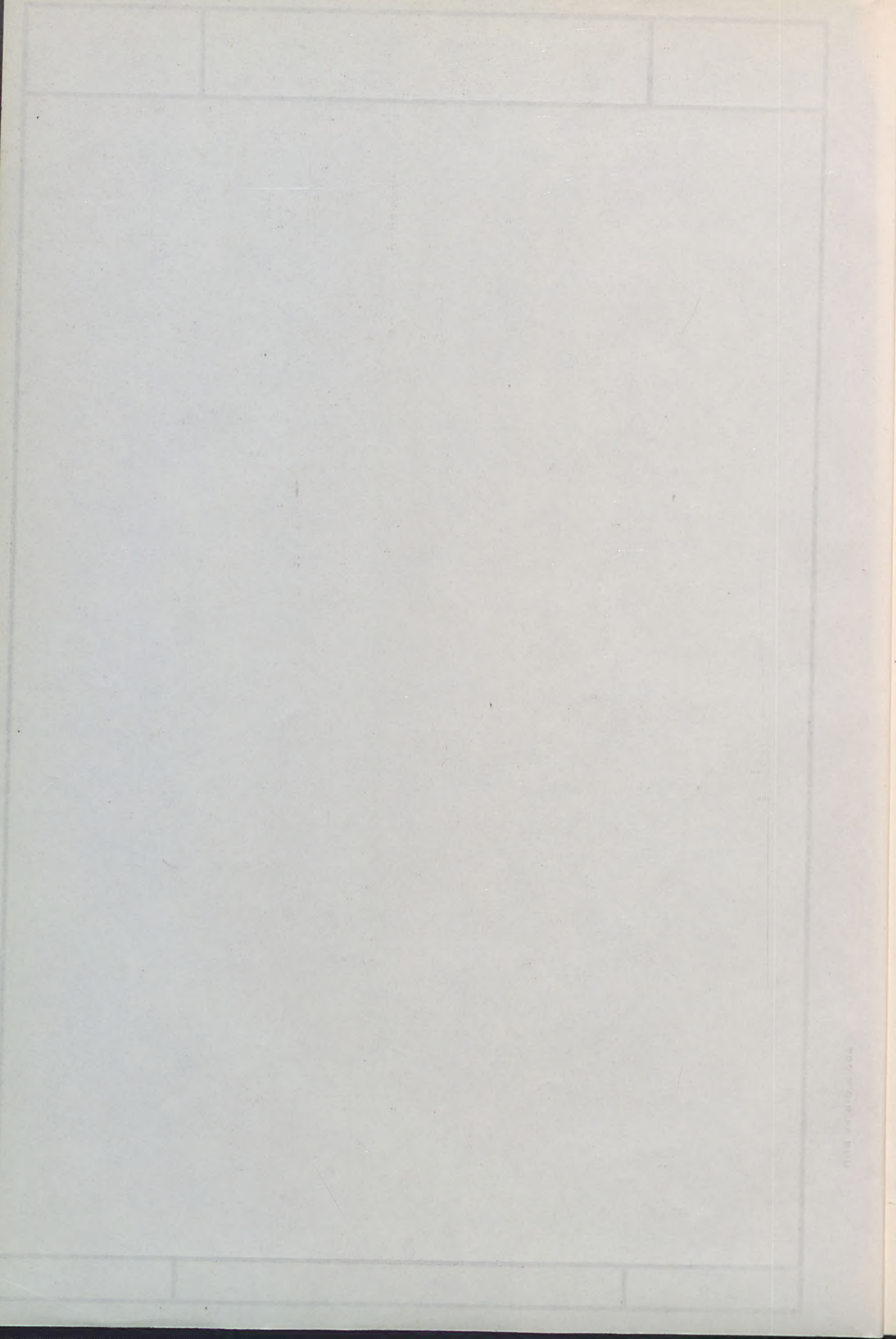
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

a_6 = 55 mm

UNE A4 210 X 297

10 - 6 - 72



Al estudiar el ejercicio propuesto en la lámina 25, hemos obtenido unas deducciones previas de caracter general, comunes a los cinco poliedros regulares.

Las formulas allí deducidas las aplicaremos sucesivamente a los cuatro poliedros que quedan por estudiar. El desarrollo del cálculo correspondiente a esta lámina, seguirá pues aquellas directrices, a las que haremos las oportunas referencias.

PROCESO GRÁFICO

En el caso del poliedro derivado del exaedro regular, el proceso gráfico es inmediato, ya que sabemos que el conjugado del exaedro regular es el octaedro regular, y esta representación ha sido ya efectuada en el ejercicio de la lámina 23, cuyo proceso nos permite:

1º Representar el exaedro regular dado, de vértices 1 al 8, inscrito en una esfera de 55 mm de radio.

2º Obtener los vértices del octaedro conjugado 9 al 14, inscrito en la misma esfera (estos vértices se han de corresponder con los 11 al 16 de la lámina 23).

3º Unir los vértices 9 al 14 con los correspondientes de cada cara del exaedro dado.

Al terminar la representación del poliedro derivado, po-

Radio "c_6" de la esfera inscrita en el mismo

Se deduce de la fórmula 13, lám. 2.

$$c_6 = \frac{1}{2} l_6 = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_6$$

Radio "d_6" de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del mismo.

Se deduce de la fórmula 14, lám. 2

$$d_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_6$$

Radio "k_6" de la circunferencia inscrita al polígono regular de una cara del mismo (apotema).

Se deduce de la fórmula 16, lám. 2

$$k_6 = \frac{1}{2} l_6 = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_6$$

Angulo rectilíneo "$2\varphi_6$" del diedro del mismo.

Se deduce de la fórmula 15, lám. 2

$$\operatorname{sen} \varphi_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 2\varphi_6 = 90°$$

Tomando como base los valores anteriores, deduciremos los siguientes del poliedro derivado.

Angulo rectilíneo "$2\alpha_6$" del diedro formado por dos ca-

Radio "r_i" de la esfera inscrita en el icosaedro

Se deduce de la fórmula 13, siendo

$$r_i = \frac{1}{2} l_c = \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a_g = \frac{\sqrt{3}}{3} a_c$$

Radio "a_g" de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del icosaedro.

Se deduce de la fórmula 14, siendo

$$a_g = \frac{\sqrt{2}}{2} l_g = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_g = \frac{\sqrt{6}}{3} a_c$$

Radio "r_g" de la circunferencia inscrita al polígono regular de una cara del icosaedro (apotema)

Se deduce de la fórmula 14, siendo

$$r_g = \frac{1}{2} l_c = \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a_c = \frac{\sqrt{3}}{3} r_c$$

Ángulo rectilíneo "$2\varphi_c$" del diedro del icosaedro.

Se deduce de la fórmula 15, siendo

$$\operatorname{sen} \varphi_c = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 2\varphi_c = 90°$$

Resumiendo todos los valores anteriores, obtenemos las siguientes del poliedro conjugado.

Ángulo rectilíneo "$2\varphi_a$" del diedro formado por dos ca-

ras contiguas del poliedro derivado, en una arista del exaedro dado.

Se deduce de la fórmula general [4] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$tg\ \alpha_6 = \frac{a_6 \cdot k_6}{(k_6)^2 - a_6\, c_6 + (c_6)^2} = \frac{a_6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_6}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2 - a_6 \frac{\sqrt{3}}{3} a_6 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2} = 2\sqrt{3} + 3$$

$$lg\ tg\ \alpha_6 = lg\left(2\sqrt{3}+3\right) = lg\ 6,4641016\ldots \quad 0,8105082\ldots = tg\ \alpha_6$$

$$\alpha_6 = 81^{\circ}\ 12'\ 21,7'' \qquad 2\alpha_6 = 162^{\circ}\ 24'\ 43,4''$$

El valor de $\alpha_6 < 90^{\circ}$ nos demuestra la convexidad del poliedro derivado (ver lám. 25 "Consideraciones previas").

Altura "p" de una cara lateral de la pirámide recta formada en cada cara del exaedro dado (cara del poliedro derivado).

Se deduce de la fórmula [5] (ver lám. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$p = \sqrt{(a_6 - c_6)^2 + (k_6)^2} = \sqrt{\left(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\ a_6$$

Desarrollo del cálculo anterior: $p = \sqrt{\left(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2} =$

$$= \sqrt{(a_6)^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{3}{9}(a_6)^2} = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{3}{9}}\ a_6 = \sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}}{9} + \frac{3}{9}}\ a_6 = \boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\ a_6}$$

Arista lateral "q" de la pirámide recta regular, o lado igual del triángulo isósceles de una cara del poliedro derivado.

Se deduce de la fórmula general [6] (ver lám. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$q = \sqrt{(a_6 - c_6)^2 + (d_6)^2} = \sqrt{\left(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} a_6\right)^2} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}}\, a_6$$

Desarrollo del cálculo anterior: $q = \sqrt{\left(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} a_6\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{6}{9}}\; a_6 = \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{6}{9}}\; a_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - 6\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}}\; a_6 =$$

$$= \sqrt{\frac{18 - 6\sqrt{3}}{9}}\; a_6 = \boxed{\sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}}\; a_6}$$

Diagonal "t" que se obtiene al unir los extremos de dos lados consecutivos del polígono de una cara del exaedro dado.

Es la diagonal de un cuadrado, cuyo valor será

$$t = \sqrt{2}\; l_6 = \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 = \frac{2\sqrt{6}}{3} a_6$$

Ángulo rectilíneo del diedro "$2\gamma_6$" formado por dos caras laterales contiguas en las aristas de la pirámide recta.



Se deduce de la fórmula general [7] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{sen} \gamma_6 = \frac{t\,q}{2\,L_6\,p} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}\,a_6 \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\,a_6}{2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\,a_6 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\,a_6} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen} \gamma} = \dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}\,a_6 \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\,a_6}{2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\,a_6 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\,a_6} =$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3} : \frac{5-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{(6-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})}{13}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{30-10\sqrt{3}+12\sqrt{3}-12}{13}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{18+2\sqrt{3}}{13}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{18+2\sqrt{3}}{13}} = \boxed{\sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}}}$$

$$\operatorname{sen} \gamma_6 = \sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}} = 0{,}90\ 85\ 93\ 6\ldots$$

$$\lg .\ \operatorname{sen} \gamma_6 = \bar{1}{,}958\ 36\ 97 \qquad \gamma_6 = 65^\circ\ 18'\ 42{,}2''$$

$$2\gamma_6 = 130^\circ\ 37'\ 24{,}4''$$



Radio "b_1" de la esfera tangente a las aristas del poliedro regular dado.

Se deduce de la fórmula 12. lám. 2

$$b_1 = b_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_c = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3}\, a_6$$

Angulo diedro "β_6" formado por una cara lateral de la pirámide y su base.

Se deduce de la fórmula general [8] (ver condiciones previas, lám. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{sen} \beta_6 = \frac{a_6 - c_6}{p} = \frac{a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_6}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{3}}{13}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen} \beta_6} = \dfrac{a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_6}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6} =$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}} = \frac{(3-\sqrt{3}) \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}}{3 \times \frac{5-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{(3-\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}{13} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{15 - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 6}{13} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{9+\sqrt{3}}{13} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{\frac{(9+\sqrt{3})^2 (5-2\sqrt{3})}{13^2 \times 3}} = \sqrt{\frac{(81+3+18\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}{13^2 \times 3}} =$$



$$= \sqrt{\frac{(24 + 18\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})}{13^2 \times 3}} = \sqrt{\frac{6 \times (14 + 3\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})}{13^2 \times 3}} = \sqrt{\frac{2 \times (70 - 28\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 18)}{13^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (52 - 13\sqrt{3})}{13^2}} = \sqrt{\frac{2 \times (4 - \sqrt{3})}{13}} = \boxed{\sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{3}}{13}}}$$

El valor numérico de β_6, expresado en grados sexagesimales, es el siguiente:

$$\operatorname{sen} \beta_6 = \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{3}}{13}} = 0{,}59\ 06\ 90\ 5 \qquad \operatorname{lg} \operatorname{sen} \beta_6 = \bar{1},\ 7713\ 600$$

$$\beta_6 = 36^\circ\ 12'\ 21{,}7''$$

debiendo verificarse como comprobación (ver fórm. [11], consideraciones previas, lám. 25) que

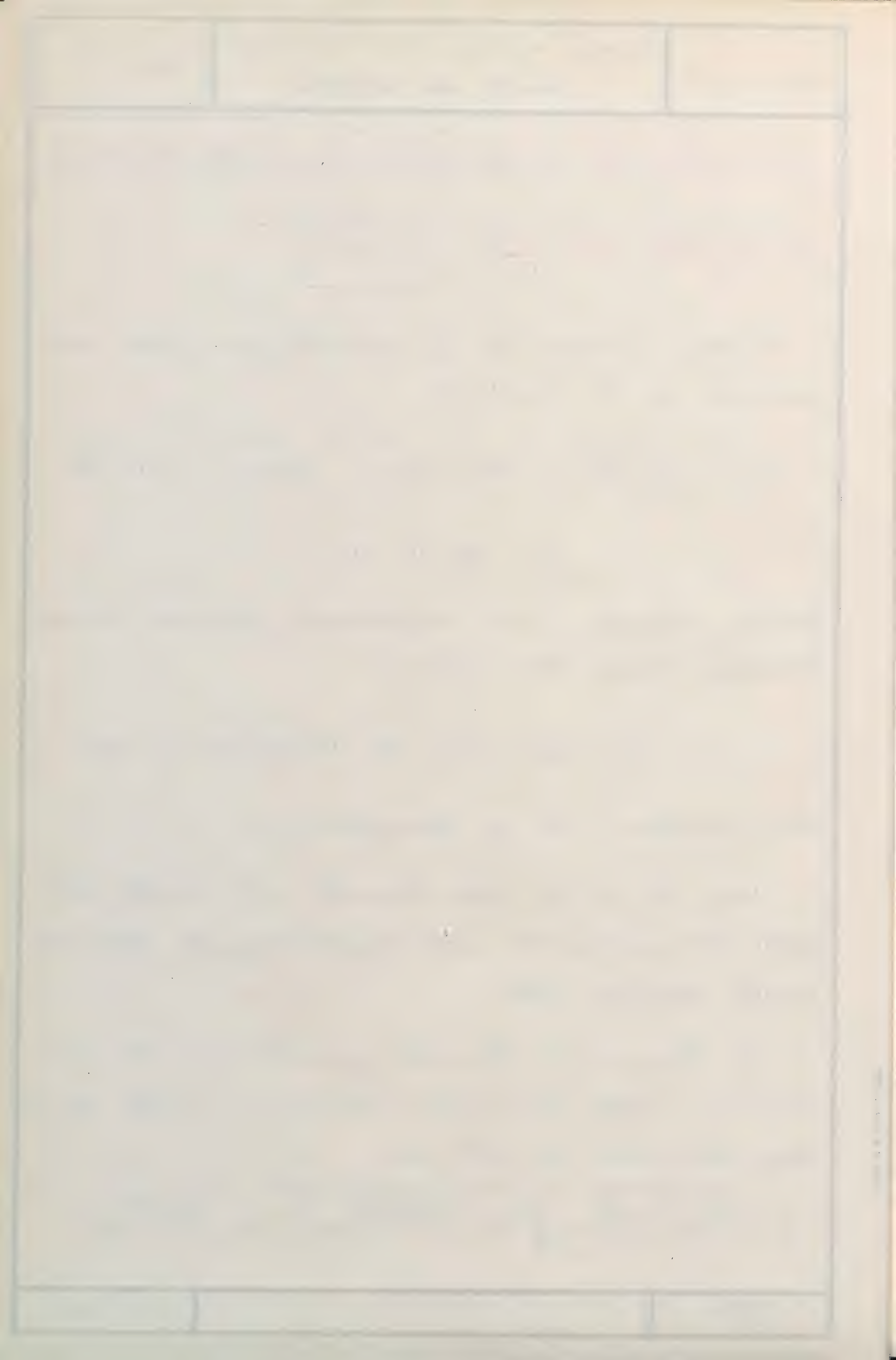
$$\alpha_6 = \varphi_6 + \beta_6 = 45^\circ + 36^\circ\ 12'\ 21{,}7'' = 81^\circ\ 12'\ 21{,}7''$$

valor coincidente al ya obtenido de α_6.

<u>Radio "b_2" de la esfera tangente a las aristas laterales de las pirámides rectas cuyas bases son caras del exaedro regular dado.</u>

Se deduce de la fórmula general [9] (ver consideraciones previas. lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$b_2 = \sqrt{(a_6)^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{(a_6)^2 - \left(\sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}}\, a_6\right)^2 : 4} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}\, a_6$$



Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{b_2} = \sqrt{(a_6)^2 - \left(\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6\right)^2 : 4} =$

$= \sqrt{(a_6)^2 - \frac{6-2\sqrt{3}}{3} : 4\, (a_6)^2} = \sqrt{1 - \frac{3-\sqrt{3}}{6}}\, a_6 = \sqrt{\frac{6-3+\sqrt{3}}{6}}\, a_6 = \boxed{\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_6}$

Radio "c_1" de la esfera inscrita en el poliedro derivado

Se deduce de la fórmula general [10] (ver consideraciones previas, lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_6$ siendo $b_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_6$; $\operatorname{tg} \alpha_6 = 2\sqrt{3} + 3$

pero $\operatorname{sen} \alpha_6 = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha_6}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_6}} = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{1+(2\sqrt{3}+3)^2}}$ de donde

$$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_6 \times \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{1+(2\sqrt{3}+3)^2}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{13}}\, a_6$$

Desarrollo del cálculo anterior: $c_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_6 \times \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{1+(2\sqrt{3}+3)^2}} =$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{1+12+9+12\sqrt{3}}}\, a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{2\times(11+6\sqrt{3})}}\, a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{6}\times\sqrt{2\times(11+6\sqrt{3})}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}+3}{2\times(11+6\sqrt{3})}\, a_6 = \frac{\sqrt{12\,(11+6\sqrt{3})}}{3} \times \frac{(2\sqrt{3}+3)(11-6\sqrt{3})}{2\times(121-108)}\, a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{12\,(11+6\sqrt{3})}}{3} \times \frac{(2\sqrt{3}+3)(11-6\sqrt{3})}{2\times 13}\, a_6 = \frac{\sqrt{12\,(11+6\sqrt{3})(11-6\sqrt{3})^2}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}+3}{2\times 13}\, a_6$$



$$= \frac{\sqrt{3 \times (11-6\sqrt{3}) \times (121-108)} \times (2\sqrt{3}+3)}{3 \times 13} a_6 = \frac{\sqrt{3 \times 13 \times (11-6\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)^2}}{3 \times 13} a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{3 \times 13 \times (11-6\sqrt{3})(12+9+12\sqrt{3})}}{3 \times 13} a_6 = \frac{\sqrt{3 \times 13 \times (11-6\sqrt{3})(21+12\sqrt{3})}}{3 \times 13} a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{3 \times 3 \times 13 \times (11-6\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}}{3 \times 13} a_6 = \frac{\sqrt{13 \times (77 - 42\sqrt{3} + 44\sqrt{3} - 72)}}{13} a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{13 \times (5+2\sqrt{3})}}{13} a_6 = \sqrt{\frac{13 \times (5+2\sqrt{3})}{13^2}} a_6 = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{13}} a_6}$$

Este mismo valor se puede deducir de la fórmula equivalente [10'] (lám. 25), en la que

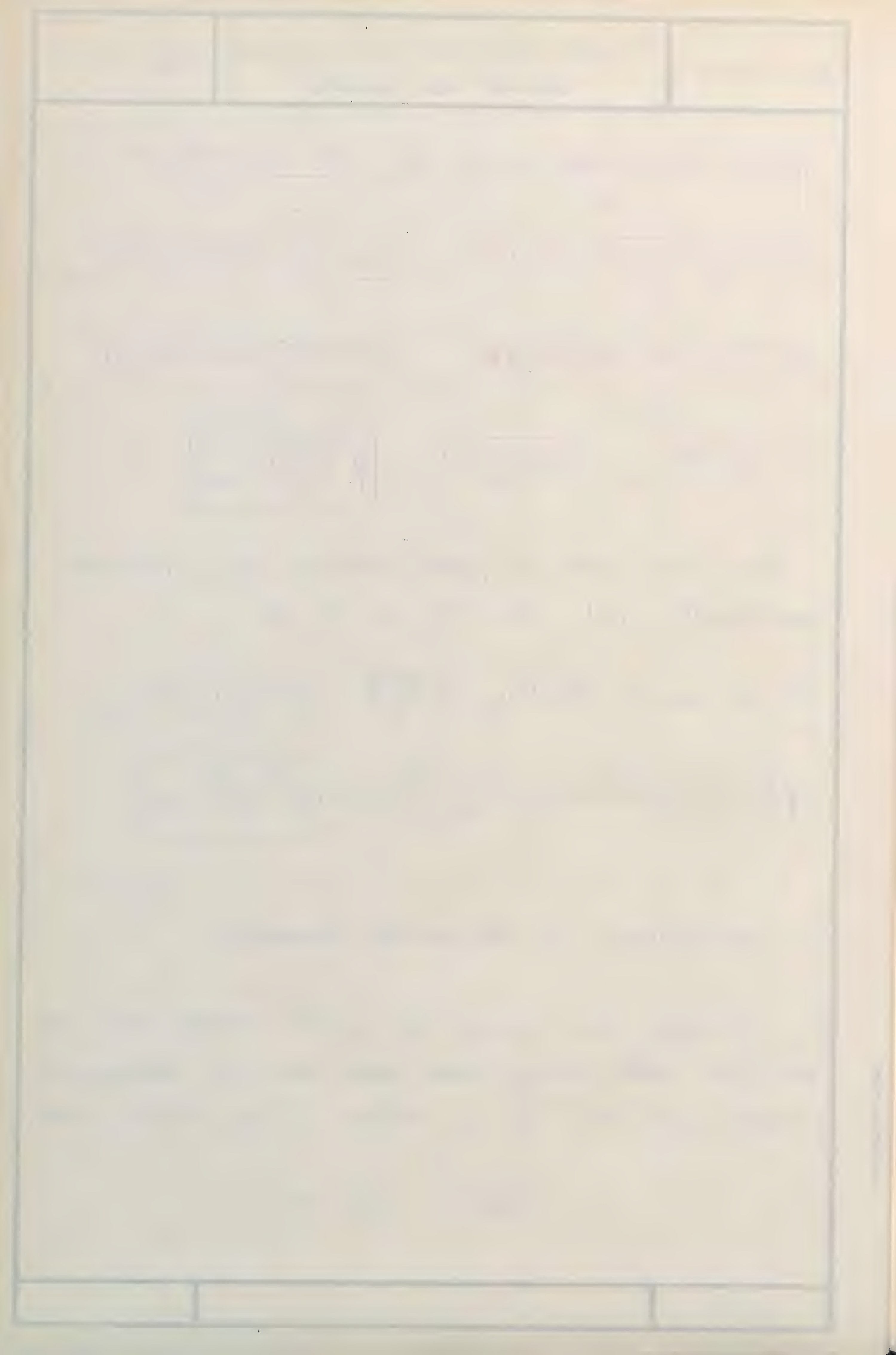
$$\boxed{c_1} = b_2 \operatorname{sen} \gamma_6 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} a_6 \times \sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}} = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})(9+\sqrt{3})}{6 \times 13}} a_6 =$$

$$= \sqrt{\frac{27 + 9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3}{6 \times 13}} a_6 = \sqrt{\frac{30 + 12\sqrt{3}}{6 \times 13}} a_6 = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{13}} a_6}$$

<u>Area lateral "S" del poliedro derivado</u>

Se obtiene como suma de las áreas laterales de las seis pirámides rectas de base cuadrada, cuyas caras son triángulos isósceles de base "l_6" y altura "p", ya determinados.

(sigue en hoja 11)



$$S = 6 \times 4 \times \frac{l_6 \times P}{2} = 6 \times 4 \times \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6}{2} = 8\sqrt{5-2\sqrt{3}}\,(a_6)^2$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{S} = 6 \times 4 \times \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6}{2} =$

$$= \frac{6 \times 4 \times 2}{3 \times 2}\sqrt{3}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\,(a_6)^2 = 8\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3} \times (\sqrt{3})^2}\; a_6^2 = \boxed{8\sqrt{5-2\sqrt{3}}\,(a_6)^2}$$

Volumen "V" del poliedro derivado

Se obtiene como suma del volumen del exaedro dado y de las seis pirámides de sus caras.

$$V = V_6 + 6 \times \frac{S_4 \times h}{3}$$

siendo "S_4" el área de una cara del exaedro, y "h" la altura de la pirámide.

Para obtener V_6 en función de a_6, ver lám. 2, fórm. 19 y 11, que nos dan

$$V_6 = (l_6)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} a_6\right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}}(a_6)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}(a_6)^3$$

Por otra parte tendremos que

$$S_4 = (l_6)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} a_6\right)^2 = \frac{4}{3}(a_6)^2$$

y también que (ver lám. 2, fórm. 11 y 13)

$$h = a_6 - c_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_6 - \frac{1}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times l_6 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} a_6 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} a_6$$



y finalmente:

$$V = V_6 + 6 \times \frac{S_4 \cdot h}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{9}(a_6)^3 + 6 \times \frac{\frac{4}{3}(a_6)^2 \times \frac{3-\sqrt{3}}{3} a_6}{3} = \frac{8}{3}(a_6)^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{V} = \frac{8\sqrt{3}}{9}(a_6)^3 + 6 \times \frac{\frac{4}{3}(a_6)^2 \times \frac{3-\sqrt{3}}{3} a_6}{3} =$

$$= \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{6 \times 4 \times (3-\sqrt{3})}{9 \times 3}\right)(a_6)^3 = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8(3-\sqrt{3})}{9}\right)(a_6)^3 =$$

$$= \frac{8}{9}\left(\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}\right)(a_6)^3 = \boxed{\frac{8}{3}(a_6)^3}$$

(sigue en h. 13)

UNE A4 210 X 297



En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados anteriores.

CUADRO SINÓPTICO

	Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
252	l_6	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_6$	$1.\ 15\ 47\ 01 \ldots a_6$
253	b_1	$\frac{\sqrt{6}}{3}\, a_6$	$0,\ 81\ 64\ 97 \ldots a_6$
254	b_2	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_6$	$0,\ 88\ 80\ 74 \ldots a_6$
255	c_6	$\frac{\sqrt{3}}{3}\, a_6$	$0,\ 57\ 73\ 50 \ldots a_6$
256	c_1	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{13}}\, a_6$	$0,\ 80\ 68\ 98 \ldots a_6$
257	d_6	$\frac{\sqrt{6}}{3}\, a_6$	$0,\ 81\ 64\ 97 \ldots a_6$
258	k_6	$\frac{\sqrt{3}}{3}\, a_6$	$0,\ 57\ 73\ 50 \ldots a_6$
259	$2\varphi_6$	$\text{sen}\ \varphi_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{sen}\ \varphi_6 = 0.70\ 71\ 07$ $2\varphi_6 = 90^\circ$
260	$2\alpha_6$	$\text{tg}\ \alpha_6 = 2\sqrt{3} + 3$	$\text{tg}\ \alpha_6 = 0,81\ 05\ 08$ $2\alpha_6 = 162^\circ\ 24'\ 43{,}4''$
261	$2\gamma_6$	$\text{sen}\ \gamma_6 = \sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}}$	$\text{sen}\ \gamma_6 = 0,90\ 85\ 94$ $2\gamma_6 = 130^\circ\ 37'\ 24{,}4''$
262	β_6	$\text{sen}\ \beta_6 = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{3}}{13}}$	$\text{sen}\ \beta_6 = 0,59\ 06\ 91$ $\beta_6 = 36^\circ\ 12'\ 21{,}7''$
263	p	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6$	$0,\ 71\ 55\ 18 \ldots a_6$
264	q	$\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6$	$0,\ 91\ 94\ 02 \ldots a_6$
265	t	$\frac{2\sqrt{6}}{3}\, a_6$	$1,\ 63\ 29\ 93 \ldots a_6$
266	S	$8\sqrt{5-2\sqrt{3}}\ (a_6)^2$	$9.\ 91\ 45\ 09 \ldots (a_6)^2$
267	V	$\frac{8}{3}\,(a_6)^3$	$2,\ 66\ 66\ 67 \ldots (a_6)^3$

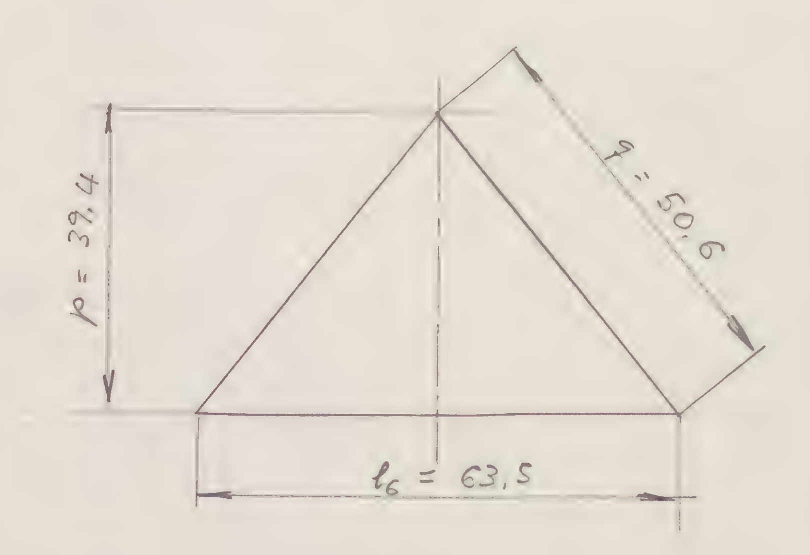
UNE A4 210 X 297



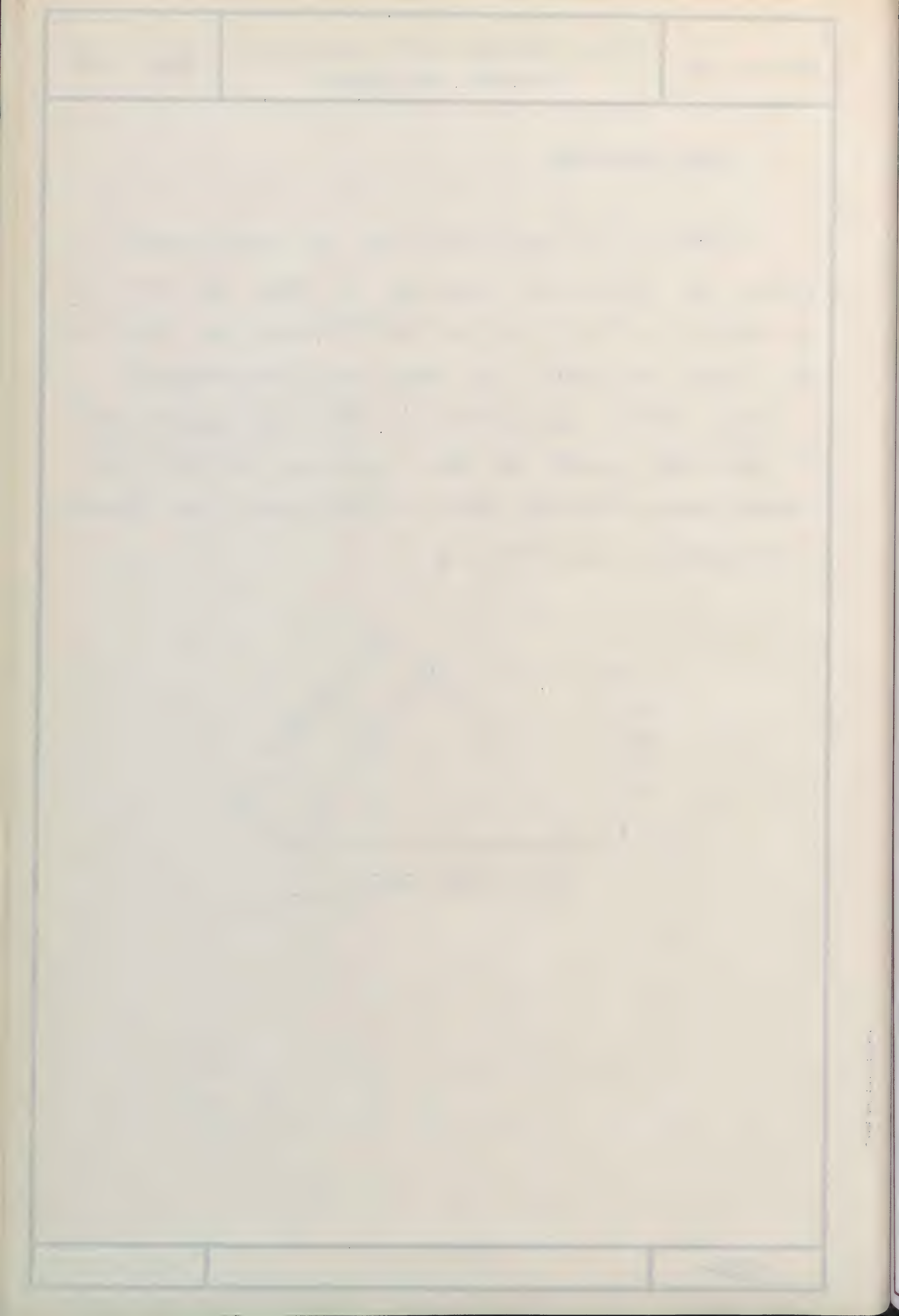
FIGURA CORPÓREA

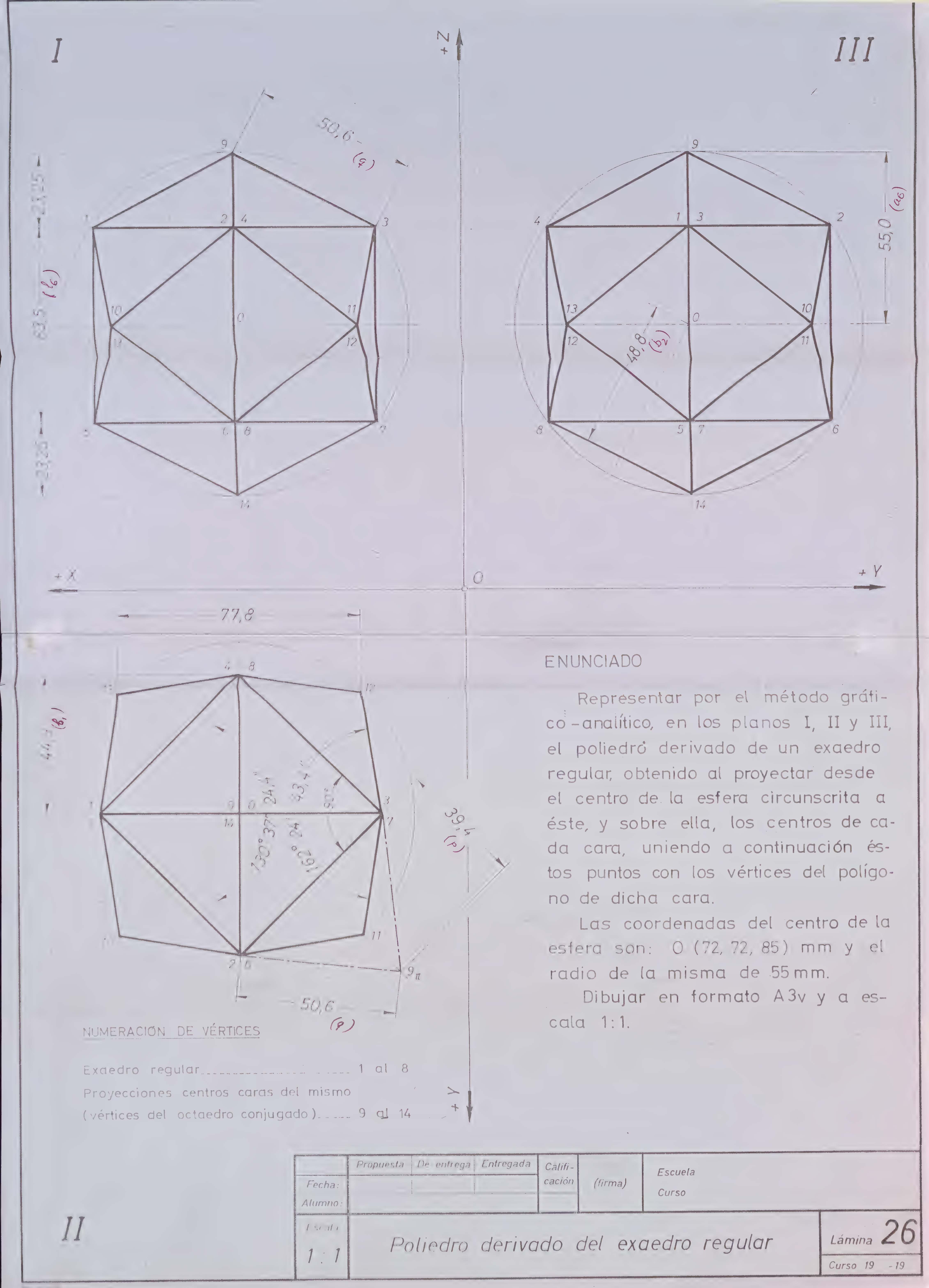
Se obtiene por acoplamiento de 24 caras iguales en forma de triángulo isósceles, de base $l_6 = 63,5$ mm y altura $p = 39,4$ mm.; en este triángulo el lado igual q, tiene el valor $q = 50,6$ mm (comprobación).

Para obtener este poliedro se formarán previamente 6 pirámides rectas de base cuadrada de lado "l_6", cuyas caras laterales son 4 triángulos (ver figura) acoplados por su lado "q".



UNE A4 210 X 297





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedró derivado de un exaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación éstos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

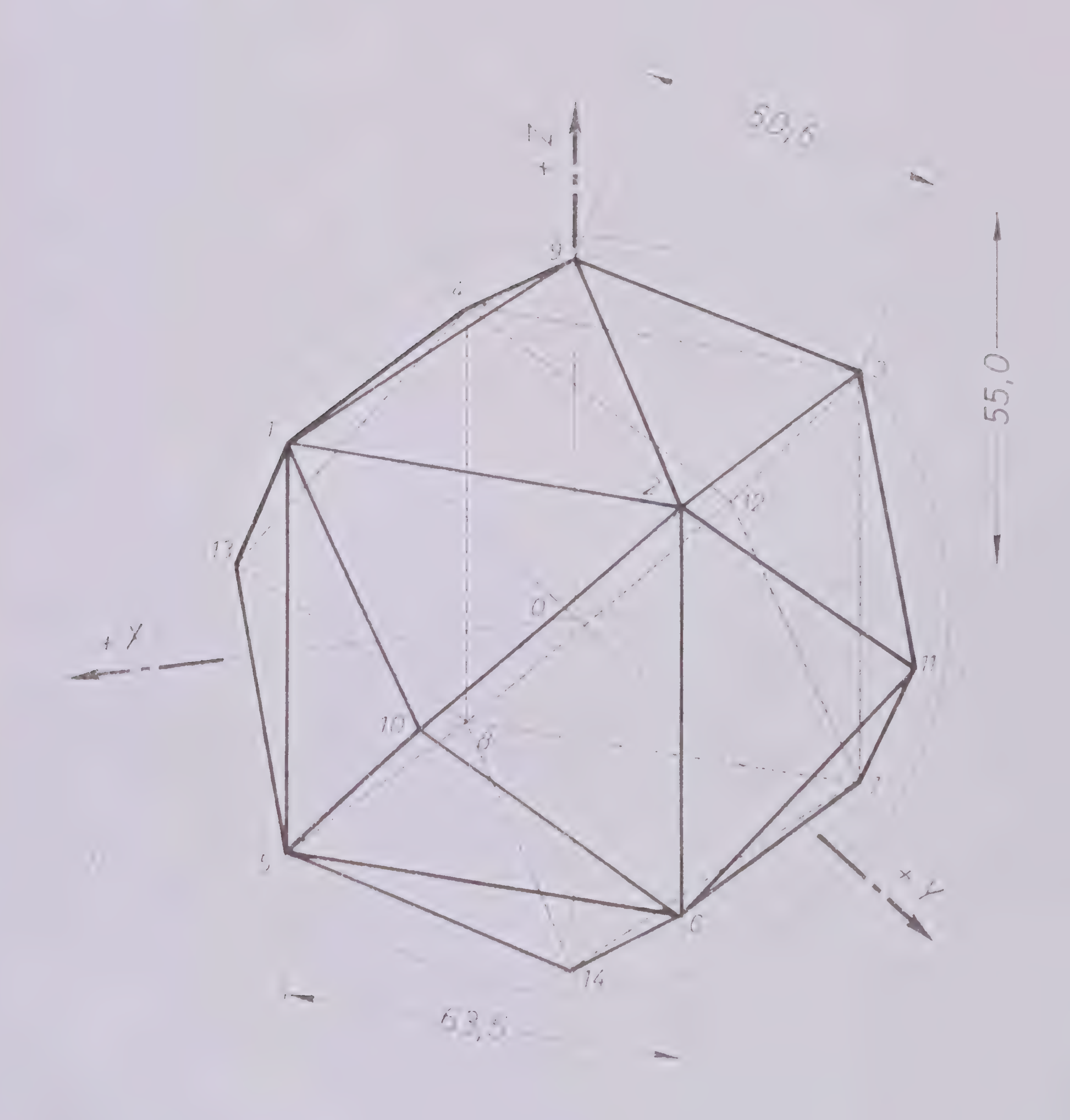
Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro regular .... 1 al 8
Proyecciones centros caras del mismo
(vértices del octaedro conjugado) .... 9 al 14

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedro derivado del exaedro regular					Lámina 26 Curso 19 - 19



Poliedro derivado del exaedro regular

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un octaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma, de 55 mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

a_8 = 55 mm.

UNE A4 210 X 297

6 - 7 - 72

Al estudiar el ejercicio propuesto en la lámina 25, hemos obtenido unas deducciones previas de carácter general, comunes a los cinco poliedros regulares.

Las fórmulas allí deducidas las aplicaremos sucesivamente en este caso particular del octaedro regular. El desarrollo del cálculo correspondiente a esta lámina, seguirá pues aquellas directrices, a las que haremos las oportunas referencias.

PROCESO GRÁFICO

En el caso del poliedro derivado del octaedro regular, el proceso gráfico es inmediato, ya que sabemos que el conjugado del octaedro regular es el exaedro regular y esta representación ha sido ya efectuada en el ejercicio de la lámina 23, cuyo proceso nos permite:

1º Representar el octaedro regular dado, de vértices 9 al 14, inscrito en una esfera de 55 mm de radio (estos vértices se han de corresponder con los 11 al 16 de la lám. 23).

2º Obtener los vértices del exaedro conjugado 1 al 8, inscrito en la misma esfera.

3º Unir los vértices 1 al 8 con los correspondientes de cada cara del octaedro dado.

Al terminar la representación del poliedro derivado, po



demás observar que este es un poliedro cóncavo, de

$C = 3 \times 8 = 24$ caras (ver lám. 25, fórm. [1]); de

$V = 6 + 8 = 14$ vértices (ver lám. 25, fórm. [2]); y de

$A = 12 + 3 \times 8 = 36$ aristas (ver lám. 25, fórm. [3])

La demostración de la concavidad de este poliedro la haremos analíticamente.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Calculemos previamente los siguientes valores deducidos de ejercicios anteriores, en función del radio a_8 (dato) de la esfera circunscrita al octaedro regular dado.

Número de caras "n" del octaedro dado

$$n = 8$$

Radio "a_8" de la esfera circunscrita al mismo (dato del ejercicio).

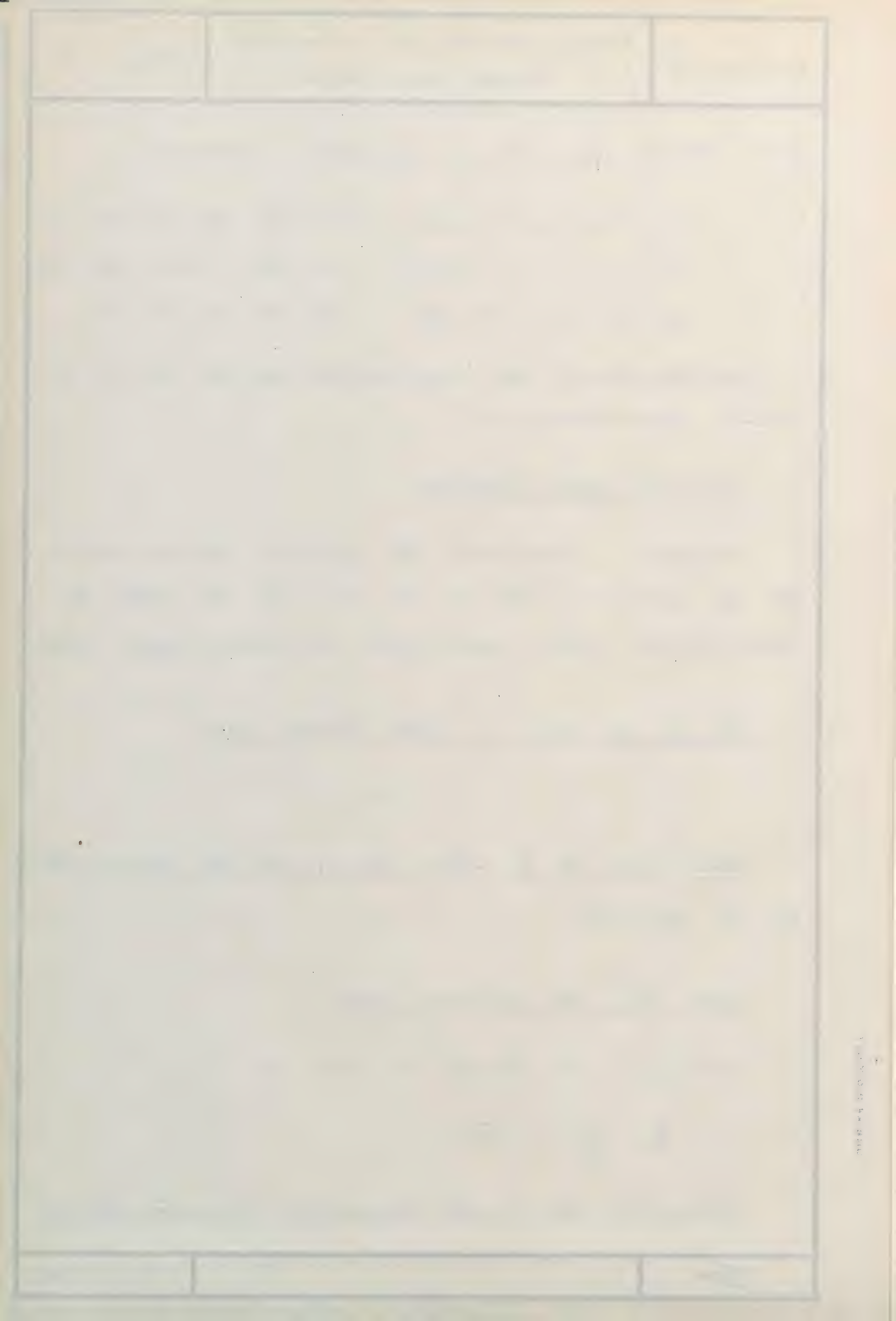
Lado "l_8" del octaedro dado

Se deduce de la fórmula 21, lám. 3

$$l_8 = \frac{2}{\sqrt{2}}\, a_8 = \sqrt{2}\, a_8$$

Radio "b_1" de la esfera tangente a las aristas del po-

UNE A4 210 X 297



<u>liedro regular dado.</u>

Se deduce de la fórmula 22, lám. 3

$$b_1 = b_8 = \frac{1}{2} l_8 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}\ a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$$

<u>Radio "c_8" de la esfera inscrita en el mismo</u>

Se deduce de la fórmula 23, lám. 3.

$$c_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} l_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2}\ a_8 = \frac{\sqrt{12}}{6} a_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_8$$

<u>Radio "d_8" de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del mismo.</u>

Se deduce de la fórmula 24, lám. 3

$$d_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} l_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{2}\ a_8 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_8$$

<u>Radio "k_8" de la circunferencia inscrita al polígono regular de una cara del mismo (apotema)</u>

Se deduce de la fórmula 26, lám. 3.

$$k_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{2}\ a_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} a_8$$

<u>Angulo rectilíneo "$2\varphi_8$" del diedro del mismo</u>

Se deduce de la fórmula 25, lám. 3

$$\operatorname{sen} \varphi_8 = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad 2\varphi_8 = 109^\circ\ 28'\ 16{,}6''$$



Tomando como base los valores anteriores, deduciremos los siguientes del poliedro derivado.

<u>Angulo rectilíneo "$2\,\alpha_8$" del diedro formado por dos caras contiguas del poliedro derivado, en una arista del octaedro dado.</u>

Se deduce de la fórmula general [4] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{tg} \alpha_8 = \frac{a_8\ k_8}{(k_8)^2 - a_8\, c_8 + (c_8)^2} = \frac{a_8 \times \frac{\sqrt{6}}{6} a_8}{\left(\frac{\sqrt{6}}{6} a_8\right)^2 - a_8 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_8 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a_8\right)^2} =$$

$$= -\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{tg} \alpha_8} = \frac{a_8 \times \frac{\sqrt{6}}{6} a_8}{\left(\frac{\sqrt{6}}{6} a_8\right)^2 - a_8 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_8 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a_8\right)^2} =$

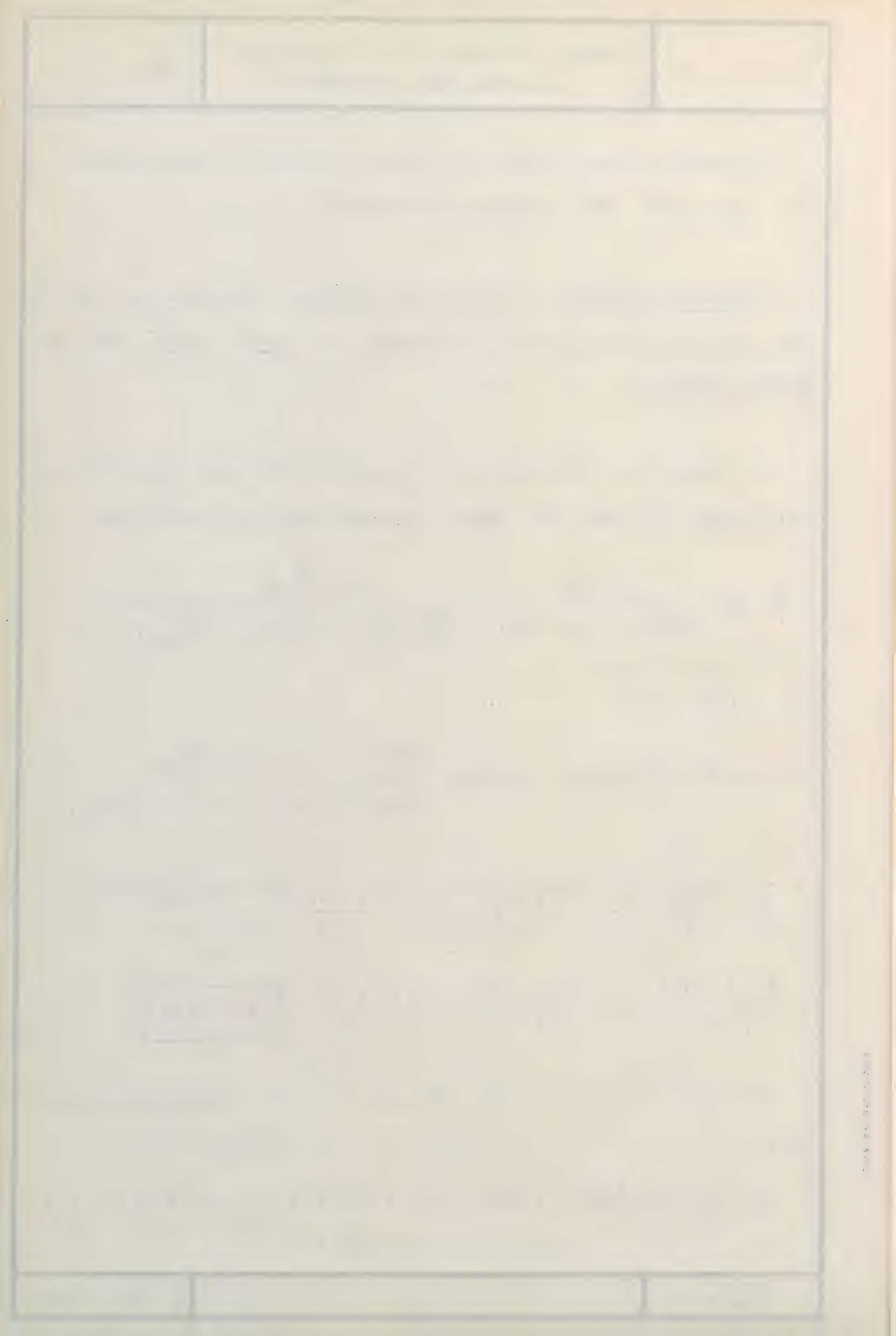
$$= \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{6}{36} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{1 - 2\sqrt{3} + 2}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3 - 2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}\,(3 + 2\sqrt{3})}{9 - 12} = -\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{18}}{3} = -\frac{3\sqrt{6} + 6\sqrt{2}}{3} = \boxed{-\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)}$$

El valor numérico de α_8, en grados sexagesimales, será:

$$\operatorname{tg} \alpha_8 = -\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right) = -5{,}27\,79\,16\,9\ldots = \operatorname{tg}(\pi - \delta) = -\operatorname{tg}\delta$$

$$\operatorname{tg}\delta = 5{,}27\,79\,16\,9$$



$\lg \operatorname{tg} \delta = \lg 5{,}27\,79\,16\,9.. = 0{,}7224\,626 \qquad \delta = 79^\circ\,16'\,17{,}1''$

$\alpha_8 = 180^\circ - 79^\circ\,16'\,17{,}1'' = 100^\circ\,43'\,42{,}9''$ y $2\alpha_8 = 201^\circ\,27'\,25{,}8''$

El valor de $\alpha_8 > 90^\circ$ nos demuestra la concavidad del poliedro derivado (ver lám. 25 "Consideraciones previas").

Altura "p" de una cara lateral de la pirámide recta formada en cada cara del octaedro dado (cara del poliedro derivado).

Se deduce de la fórmula general [5] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

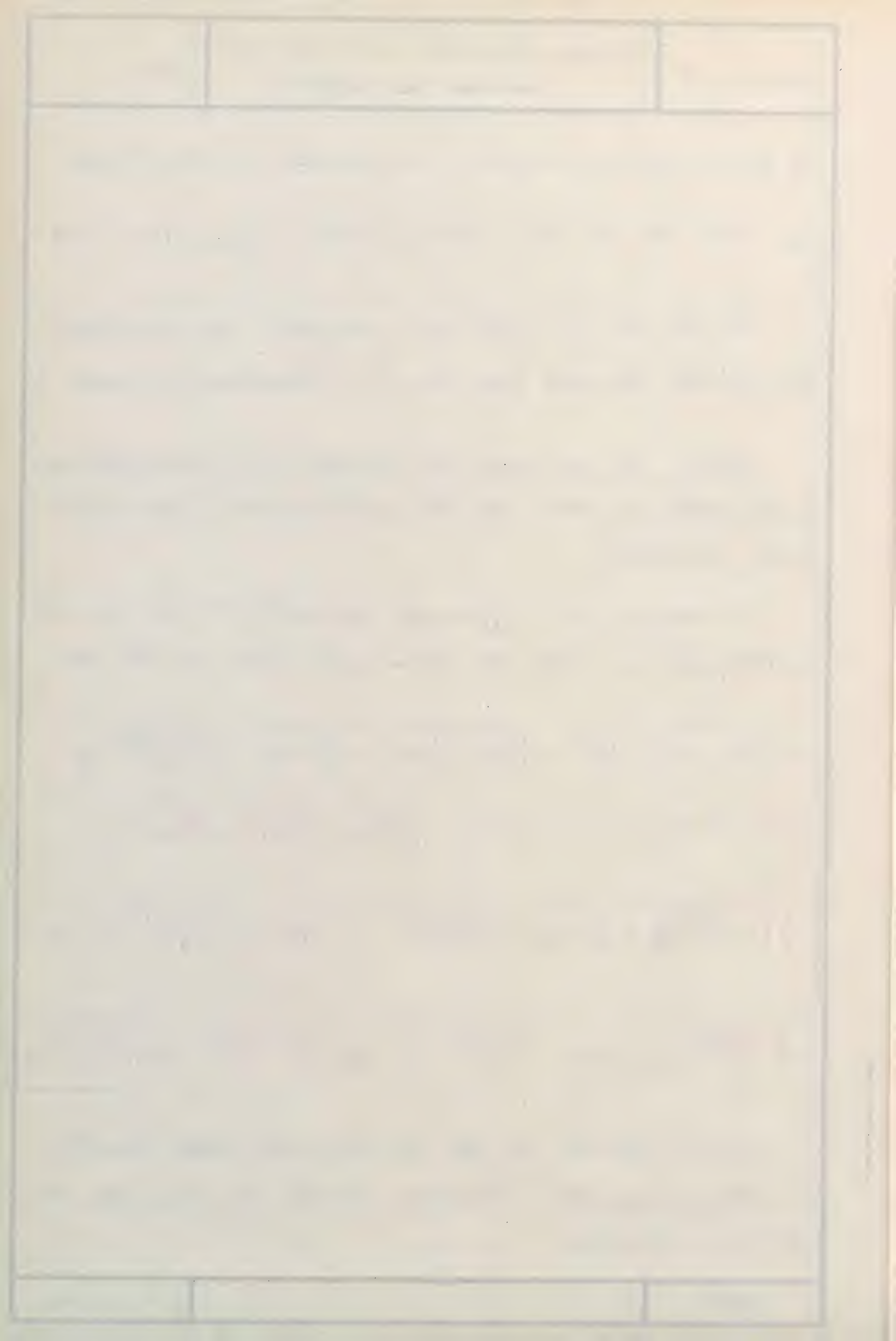
$$p = \sqrt{(a_8 - c_8)^2 + (k_8)^2} = \sqrt{\left(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_8\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a_8\right)^2} = \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}\,a_8$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{p} = \sqrt{\left(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_8\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a_8\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (a_8)^2 + \frac{6}{36}(a_8)^2} = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}} \cdot a_8 = \sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{6}} \cdot a_8 =$$

$$= \sqrt{\frac{12-6\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{6}} \cdot a_8 = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{6}} \cdot a_8 = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}+1}{6}}\,a_8 = \boxed{\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}\,a_8}$$

Arista lateral "q" de la pirámide recta regular, o lado igual del triángulo isósceles de una cara del poliedro derivado.



Se deduce de la fórmula general [6] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$q = \sqrt{(a_8 - c_8)^2 + (d_8)^2} = \sqrt{\left(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_8\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} a_8\right)^2} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\ a_8$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{q} = \sqrt{\left(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_8\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} a_8\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{6}{9}} \cdot a_8 = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{6}{9}} \cdot a_8 = \sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} \cdot a_8 =$$

$$= \sqrt{\frac{18-6\sqrt{3}}{9}}\ a_8 = \boxed{\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\ a_8}$$

Segmento "t" que se obtiene al unir los extremos de dos lados consecutivos del polígono de una cara del octaedro dado.

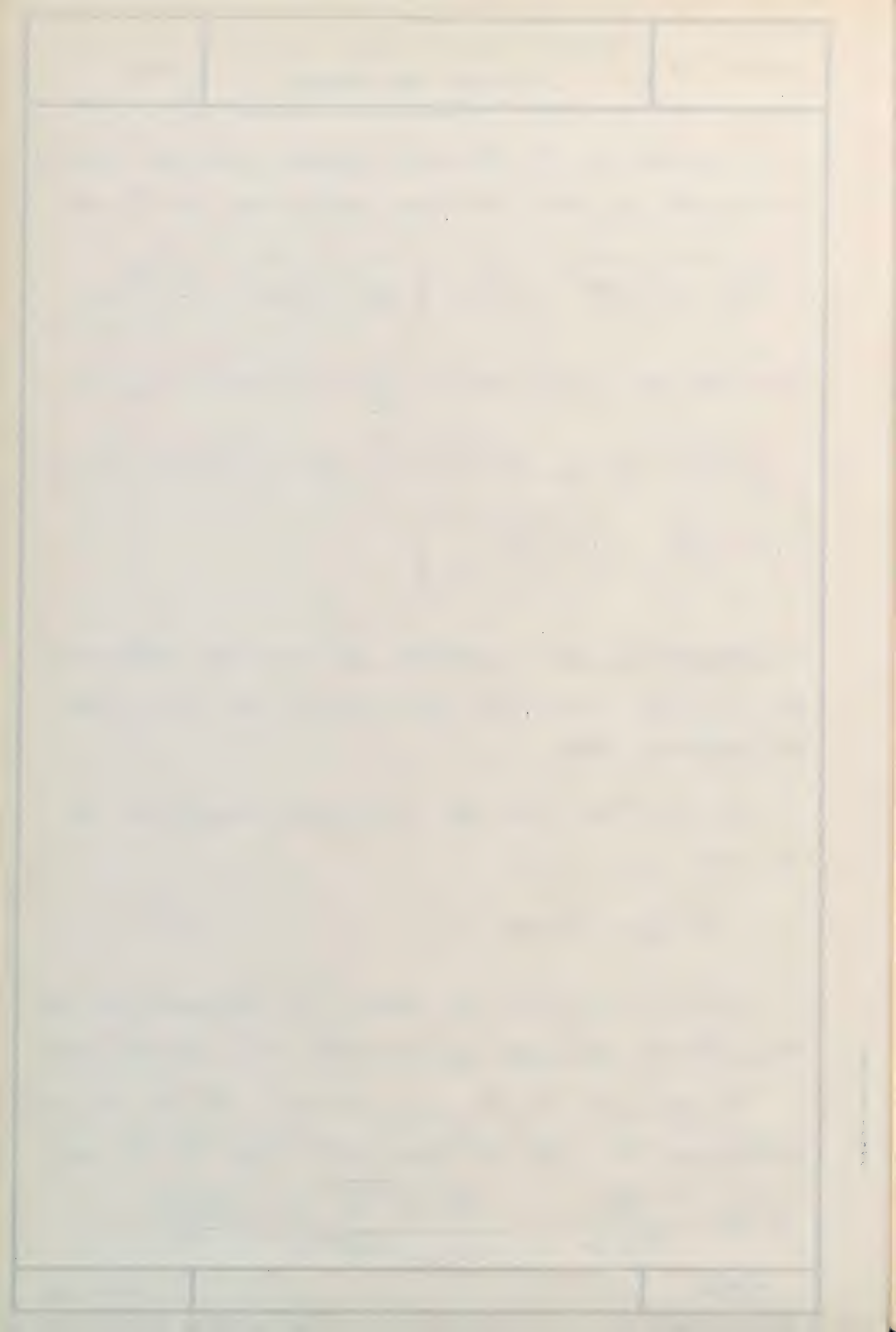
Es el tercer lado del triángulo equilátero de la cara, por lo que

$$t = l_8 = \sqrt{2} \times a_8$$

Ángulo rectilíneo del diedro "$2\gamma_8$" formado por dos caras laterales contiguas en las aristas de la pirámide recta.

Se deduce de la fórmula general [7] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{sen} \gamma_8 = \frac{tq}{2\, l_8\, p} = \frac{\sqrt{2}\, a_8 \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} \cdot a_8}{2 \times \sqrt{2}\, a_8 \cdot \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}\ a_8} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}}$$



Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen} \gamma_8} = \dfrac{\sqrt{2}\, a_8 \sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}}\; a_8}{2 \sqrt{2}\, a_8 \sqrt{\dfrac{9-4\sqrt{3}}{6}}\; a_8} =$

$$= \frac{\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}}}{2\sqrt{\dfrac{9-4\sqrt{3}}{6}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3} : \frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(6-2\sqrt{3})}{9-4\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(6-2\sqrt{3})(9+4\sqrt{3})}{81-48}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(54-18\sqrt{3}+24\sqrt{3}-24)}{33}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(30+6\sqrt{3})}{33}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(10+2\sqrt{3})}{11}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(5+\sqrt{3})}{11}} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}}}$$

$$\operatorname{sen} \gamma_8 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}} = 0{,}78\ 23\ 07\ 2 \qquad \lg \operatorname{sen} \gamma_8 = \bar{1}{,}\ 8933\ 773$$

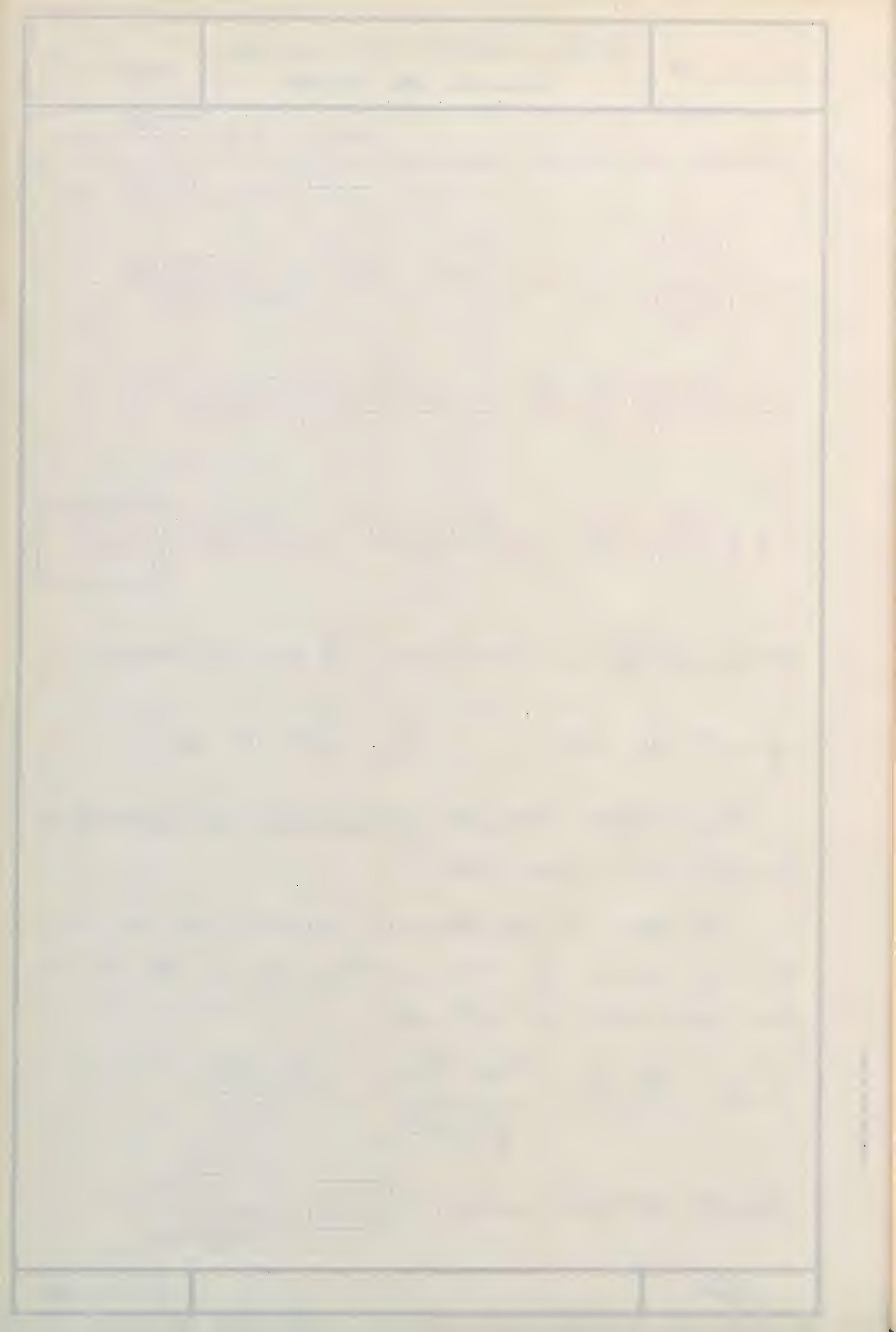
$$\gamma_8 = 51^\circ\ 28'\ 20{,}3'' \qquad 2\gamma_8 = 102^\circ\ 56'\ 40{,}6''$$

Angulo diedro "β_8" formado por una cara lateral de la pirámide y su base

Se deduce de la fórmula general [8] (ver condiciones previas, lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{sen} \beta_8 = \frac{a_8 - c_8}{p} = \frac{a_8 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} a_8}{\sqrt{\dfrac{9-4\sqrt{3}}{6}}\, a_8} = \sqrt{\frac{24-4\sqrt{3}}{33}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen} \beta_8} = \dfrac{a_8 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} a_8}{\sqrt{\dfrac{9-4\sqrt{3}}{6}}\, a_8} =$



$$= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}}{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} : \frac{9-4\sqrt{3}}{6}\right) \times \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} =$$

$$= \frac{6\times(3-\sqrt{3})}{3\times(9-4\sqrt{3})} \times \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \frac{2(3-\sqrt{3})(9+4\sqrt{3})}{81-48} \times \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} =$$

$$= \frac{2(27-9\sqrt{3}+12\sqrt{3}-12)}{33}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \frac{2\times(15+3\sqrt{3})}{33}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} =$$

$$= \frac{2(5+\sqrt{3})}{11}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(5+\sqrt{3})^2}{6}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(25+3+10\sqrt{3})}{6}} =$$

$$= \frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(28+10\sqrt{3})}{6}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(14+5\sqrt{3})}{3}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{126-56\sqrt{3}+45\sqrt{3}-60}{3}} =$$

$$= \frac{2}{11}\sqrt{\frac{66-11\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{\frac{11(6-\sqrt{3})}{3\times 11^2}} = \sqrt{\frac{4(6-\sqrt{3})}{33}} = \boxed{\sqrt{\frac{24-4\sqrt{3}}{33}}}$$

$$\operatorname{sen}\beta_8 = \sqrt{\frac{24-4\sqrt{3}}{33}} = 0,71\ 92\ 54\ 6\ldots \qquad \lg \operatorname{sen}\beta_8 = \bar{1},8568\ 827$$

$\beta_8 = 45°\ 59'\ 34,6''$ debiendo verificarse como comprobación (ver fórm. [11], lám. 25)

$$\alpha_8 = \varphi_8 + \beta_8 = 54°\ 44'\ 8,3''$$
$$+\ 45°\ 59'\ 34,6''$$
$$\alpha_8 = \underline{\underline{100°\ 43'\ 42,9''}}$$

valor coincidente con el ya obtenido de α_8

UNE A4 210 X 297



Radio "b_2" de la esfera tangente a las aristas laterales de las pirámides rectas cuyas bases son caras del octaedro regular dado.

Se deduce de la fórmula general [9] (ver consideraciones previas, lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso

$$b_2 = \sqrt{(a_8)^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{(a_8)^2 - \left(\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_8\right)^2 : 4} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_8$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{b_2} = \sqrt{(a_8)^2 - \left(\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_8\right)^2 : 4} =$

$$= \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{3}}{3\times 4}} \cdot a_8 = \sqrt{1 - \frac{3-\sqrt{3}}{6}}\, a_8 = \sqrt{\frac{6-3+\sqrt{3}}{6}}\, a_8 = \boxed{\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_8}$$

Radio "c_1" de la esfera inscrita en el poliedro derivado.

Se deduce de la fórmula general [10] (ver lám. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_8$; siendo $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$ y $\operatorname{tg} \alpha_8 = -(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})$

pero $$\operatorname{sen} \alpha_8 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_8}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_8}} = \frac{-(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})}{\sqrt{1 + \left(-(\sqrt{6}+2\sqrt{2})\right)^2}} = -\sqrt{\frac{18+8\sqrt{3}}{33}}$$

pero estando α_8 comprendido entre π y $\frac{\pi}{2}$, el sen α_8 será positivo, por lo que

$$\operatorname{sen} \alpha_8 = \sqrt{\frac{18+8\sqrt{3}}{33}}$$



Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen} \alpha_8} = \dfrac{-(\sqrt{6}+2\sqrt{2})}{\sqrt{1+\left(-(\sqrt{6}+2\sqrt{2})\right)^2}} =$

$$= -\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{\sqrt{1+(\sqrt{6}+2\sqrt{2})^2}} = -\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{\sqrt{1+6+8+4\sqrt{12}}} = -\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{\sqrt{15+8\sqrt{3}}} =$$

$$= -\frac{(\sqrt{6}+2\sqrt{2})\times\sqrt{15+8\sqrt{3}}}{15+8\sqrt{3}} = -\frac{(\sqrt{6}+2\sqrt{2})(15-8\sqrt{3})}{15^2-64\times 3}\times\sqrt{15+8\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{15\sqrt{6}+30\sqrt{2}-8\sqrt{18}-16\sqrt{6}}{33}\times\sqrt{15+8\sqrt{3}} = -\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{15+8\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{1}{33}\times\sqrt{(15+8\sqrt{3})(6\sqrt{2}-\sqrt{6})^2} = -\frac{1}{33}\sqrt{(15+8\sqrt{3})(72+6-12\sqrt{12})} =$$

$$= -\frac{1}{33}\times\sqrt{(15+8\sqrt{3})(78-24\sqrt{3})} = -\frac{1}{33}\sqrt{6\times(15+8\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})} =$$

$$= -\frac{1}{33}\sqrt{6\times(195+104\sqrt{3}-60\sqrt{3}-96)} = -\frac{1}{33}\sqrt{6\times(99+44\sqrt{3})} =$$

$$= -\frac{1}{33}\sqrt{6\times 11\times(9+4\sqrt{3})} = -\sqrt{\frac{6\times 11\times(9+4\sqrt{3})}{33\times 33}} = -\sqrt{\frac{2\times(9+4\sqrt{3})}{33}} =$$

$$= \boxed{-\sqrt{\frac{18+8\sqrt{3}}{33}}}$$

y por consiguiente, tendremos pues

$$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\times a_8\times\sqrt{\frac{18+8\sqrt{3}}{33}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}}\, a_8$$



Este mismo valor se puede deducir de la fórmula equivalente [10'] (lám. 25), en la que

$$c_1 = b_2 \operatorname{sen} \gamma_8 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_8 \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}}\, a_8$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{c_1} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_8 \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}} =$

$$= \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}{6\times 11}}\, a_8 = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{6\times 11}}\, a_8 = \sqrt{\frac{18+8\sqrt{3}}{6\times 11}}\, a_8 =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}}\, a_8}$$

Área lateral "S" del poliedro derivado

Se obtiene como suma de las áreas laterales de las ocho pirámides rectas de base triangular equilátera (de lado "l_8"), cuyas caras laterales son triángulos isósceles de base "l_8" y altura "p", ya determinados.

$$S = 8 \times 3 \times \frac{l_8 \times p}{2} = 12 \times \sqrt{2}\, a_8 \times \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}\, a_8 = 12\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}}\, (a_8)^2$$

Volumen "V" del poliedro derivado

Se obtiene como suma del volumen del octaedro dado y de las ocho pirámides formadas en sus caras.

$$V = V_8 + 8 \times \frac{S_3 \times h}{3}$$



siendo "S_3" el área de una cara del octaedro, y "h" la altura de la pirámide.

Para obtener V_8 en función de a_8, ver lám. 3, fórms. 28 y 21, que nos dan

$$V_8 = \frac{\sqrt{2}}{3}(l_8)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times (\sqrt{2}\, a_8)^3 = \frac{4}{3}(a_8)^3$$

Por otra parte, tendremos que

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(l_8)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}\, a_8)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(a_8)^2$$

y también que (ver lám. 3, fórms. 21 y 23)

$$h = a_8 - c_8 = a_8 - \frac{\sqrt{6}}{6} l_8 = a_8 - \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2}\, a_8 = \frac{\sqrt{12}}{6} a_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_8$$

y finalmente

$$V = V_8 + 8 \times \frac{S_3 \times h}{3} = \frac{4}{3}(a_8)^3 + \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(a_8)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_8 = \frac{8}{3}(a_8)^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $V = \frac{4}{3}(a_8)^3 + \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(a_8)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_8 =$

$$= \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(a_8)^3 = \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)(a_8)^3 = \frac{8}{3}(a_8)^3$$

Cuyo resultado nos demuestra que "El volumen del poliedro derivado del octaedro regular es el doble del volumen de éste"



En el cuadro sinóptico que damos a continuación resumimos los resultados anteriores:

CUADRO SINÓPTICO

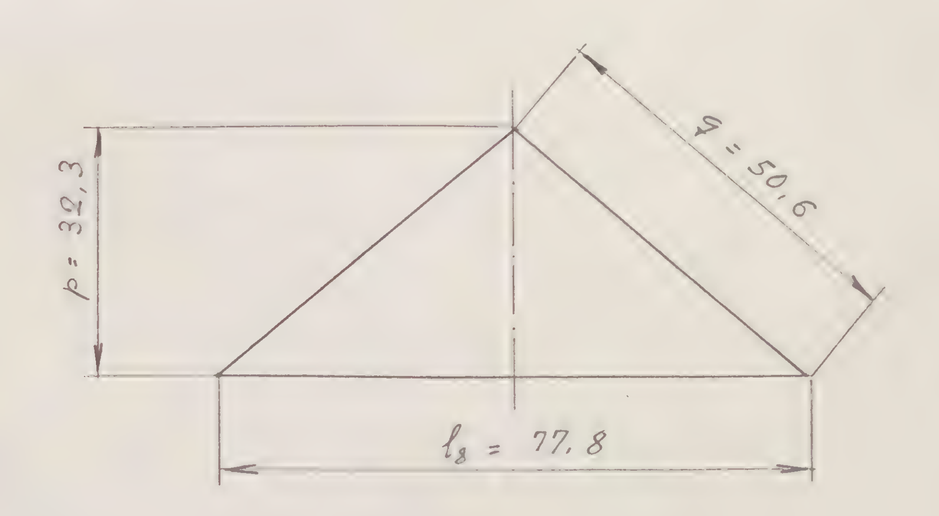
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
268 l_8	$\sqrt{2}\ a_8$	$1,41\ 42\ 14 \ldots a_8$
269 b_1	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ a_8$	$0,70\ 71\ 07 \ldots a_8$
270 b_2	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\ a_8$	$0,88\ 80\ 74 \ldots a_8$
271 c_8	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ a_8$	$0,57\ 73\ 50 \ldots a_8$
c_1	$\sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}}\ a_8$	$0,69\ 47\ 47 \ldots a_8$
d_8	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ a_8$	$0,81\ 64\ 97 \ldots a_8$
k_8	$\frac{\sqrt{6}}{6}\ a_8$	$0,40\ 82\ 48 \ldots a_8$
$2\varphi_8$	$\text{sen}\ \varphi_8 = \frac{\sqrt{6}}{3}$	$\text{sen}\ \varphi_8 = 0,81\ 64\ 97$ $2\varphi_8 = 109^\circ\ 28'\ 16,6''$
$2\alpha_8$	$\text{tg}\ 2\alpha_8 = -(\sqrt{6}+2\sqrt{2})$	$\text{tg}\ \alpha_8 = -5,27\ 79\ 17$ $2\alpha_8 = 201^\circ\ 27'\ 25,8''$
$2\gamma_8$	$\text{sen}\ \gamma_8 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}}$	$\text{sen}\ \gamma_8 = 0,78\ 23\ 07$ $2\gamma_8 = 102^\circ\ 56'\ 40,6''$
β_8	$\text{sen}\ \beta_8 = \sqrt{\frac{24-4\sqrt{3}}{33}}$	$\text{sen}\ \beta_8 = 0,71\ 92\ 55$ $\beta_8 = 45^\circ\ 59'\ 34,6''$
p	$\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}\ a_8$	$0,58\ 76\ 22 \ldots a_8$
q	$\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\ a_8$	$0,91\ 94\ 02 \ldots a_8$
t	$\sqrt{2}\ a_8$	$1,41\ 42\ 14 \ldots a_8$
S	$12\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}}\ (a_8)^2$	$9,97\ 22\ 74 \ldots (a_8)^2$
V	$\frac{8}{3}\ (a_8)^3$	$2,66\ 66\ 67 \ldots (a_8)^3$



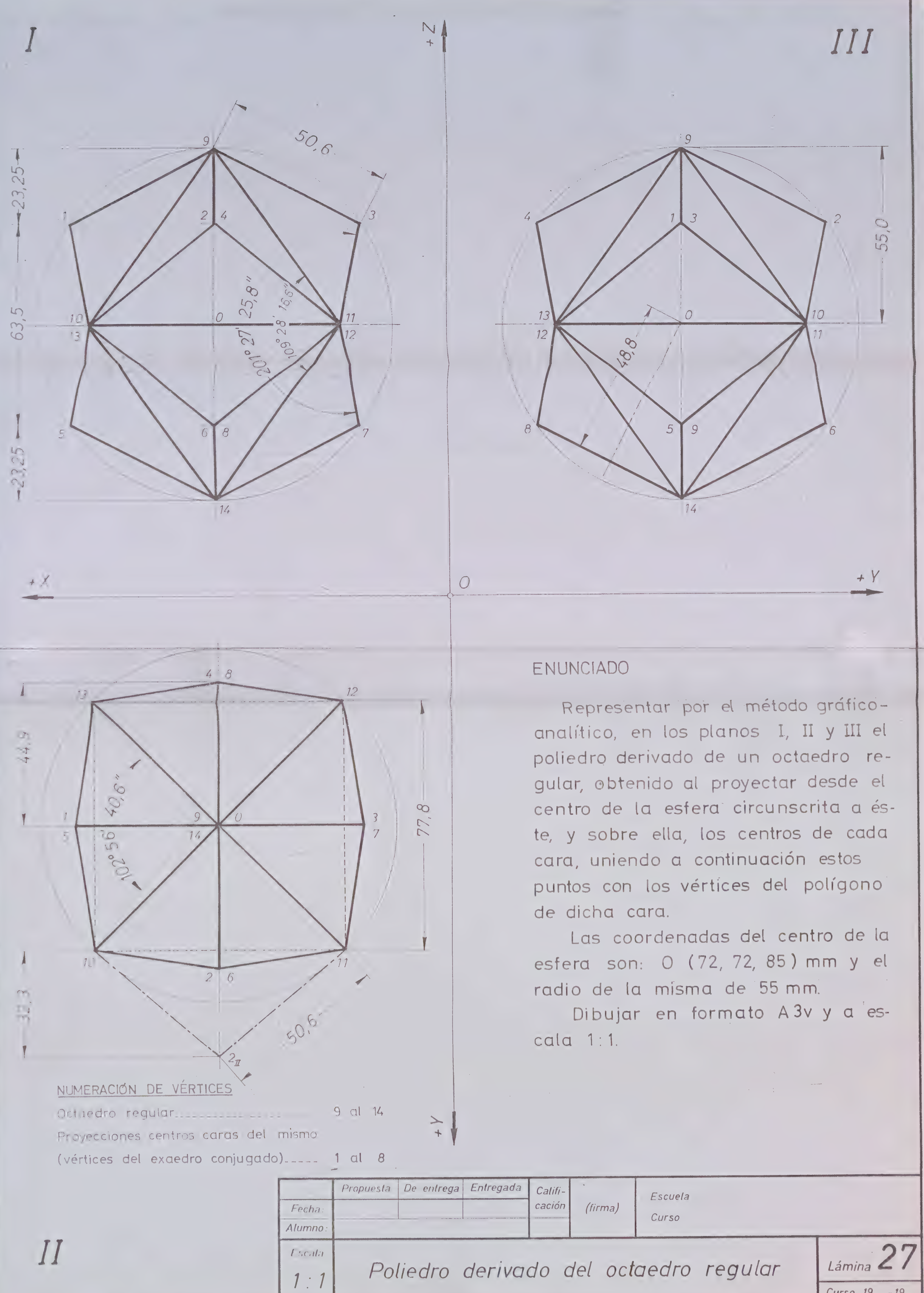
FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 24 caras iguales en forma de triángulo isósceles, de base l_8 = 77.8 mm. y altura p = 32,3 mm; en este triángulo el lado q tiene el valor q = 50,6 mm (comprobación).

Para obtener este poliedro se formarán previamente 8 pirámides rectas de base triangular equilátera de lado "l_8," cuyas caras laterales son 3 triángulos (ver figura) acoplados por su lado "q"







ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III el poliedro derivado de un octaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A 3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

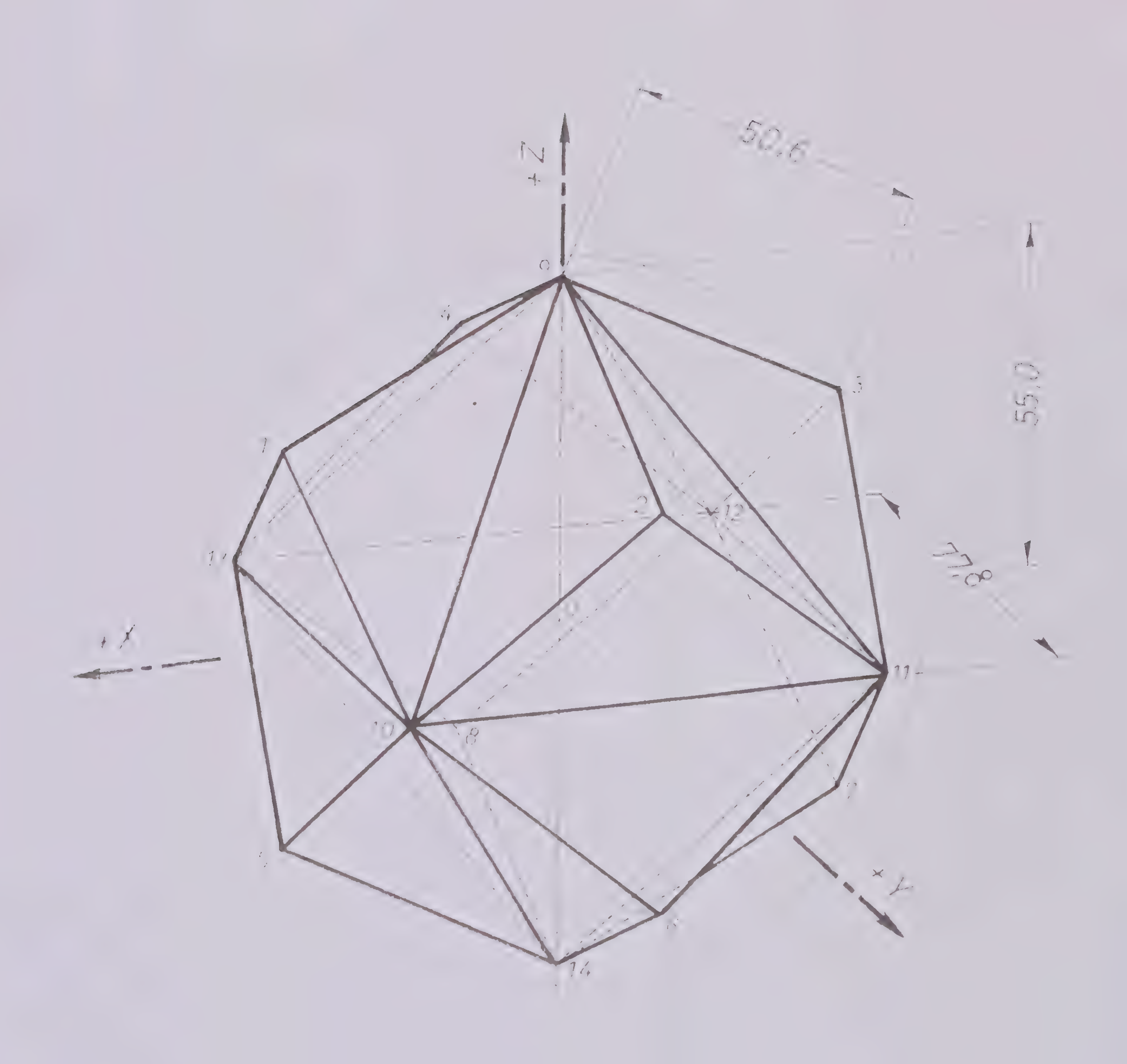
Octaedro regular........................ 9 al 14

Proyecciones centros caras del mismo

(vértices del exaedro conjugado)..... 1 al 8

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1 : 1	Poliedro derivado del octaedro regular	Lámina 27 / Curso 19 -19



Poliedro derivado del octaedro regular

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un dodecaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera, son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma, de 55 mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 72, 85) mm

a_{12} = 55 mm.

UNE A4 210 X 297



Al estudiar el ejercicio propuesto en la lámina 25, hemos obtenido unas deducciones previas de carácter general, comunes a los cinco poliedros regulares.

Las fórmulas allí deducidas las aplicaremos sucesivamente en este caso particular del dodecaedro regular. El desarrollo del cálculo correspondiente a esta lámina, seguirá pues aquellas directrices, a las que haremos las oportunas referencias.

PROCESO GRÁFICO

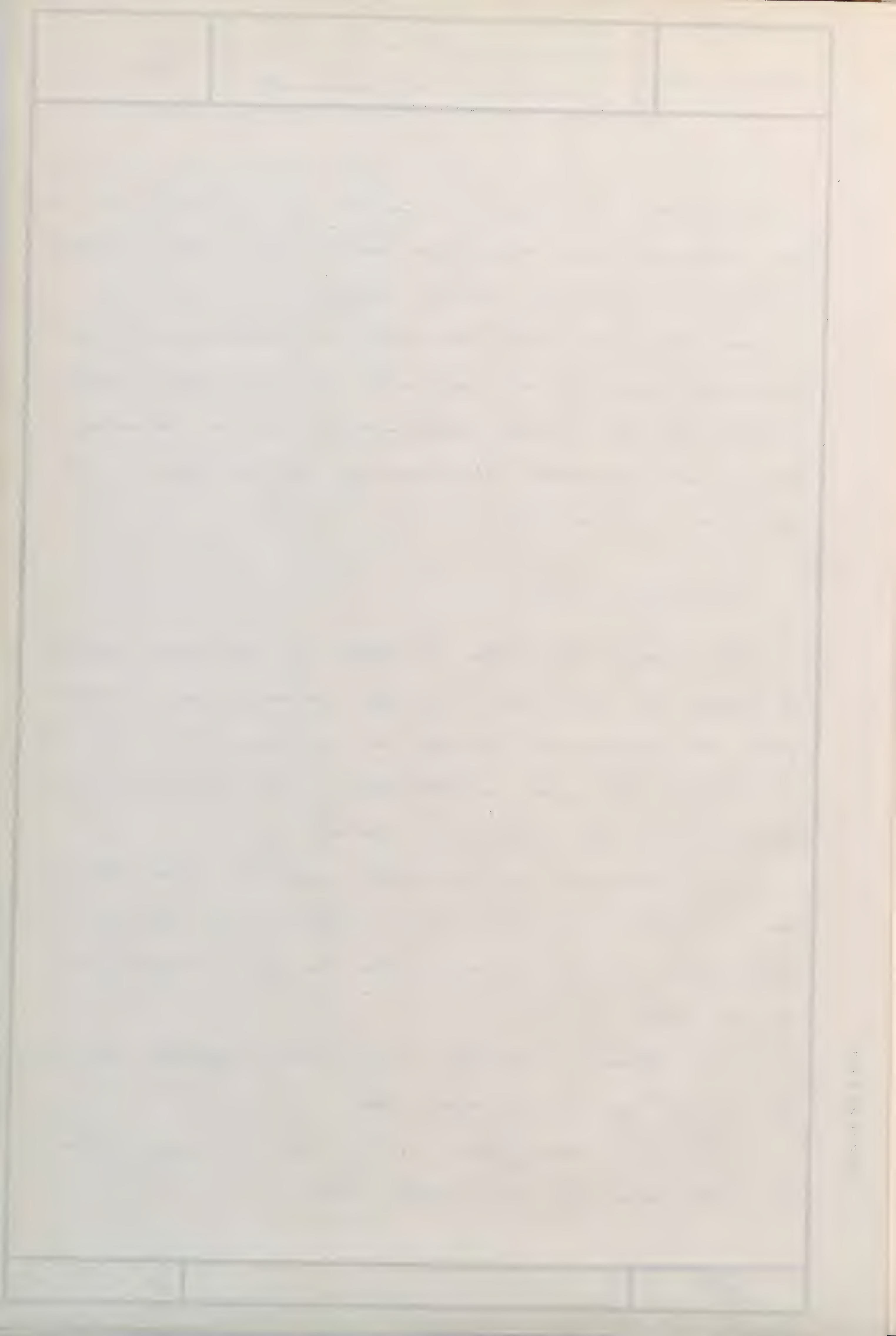
En el caso del poliedro derivado del dodecaedro regular, el proceso es inmediato, ya que sabemos que el conjugado del dodecaedro regular es un icosaedro, y esta representación ha sido ya realizada en el ejercicio de la lámina 24, cuyo proceso nos permite:

1º Representar el dodecaedro regular dado, de vértices 13 al 32, inscrito en una esfera de 55 mm de radio (estos vértices se han de corresponder con los 21 al 40 de la lámina 24).

2º Obtener los vértices 1 al 12 del icosaedro conjugado inscrito en la misma esfera.

3º Unir los vértices 1 al 12 con los correspondientes de cada cara del dodecaedro dado.

UNE A4 210 X 297



Al examinar la representación del poliedro derivado, podemos comprobar que éste es un poliedro convexo, de

$C = 5 \times 12 = 60$ caras (ver lám. 25, fórm. [1]); de

$V = 12 + 20 = 32$ vértices (ver lám. 25, fórm. [2]); y de

$A = 30 + 5 \times 12 = 90$ aristas (ver lám. 25, fórm. [3]).

La demostración de la convexidad de este poliedro la haremos analíticamente.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Calculemos previamente los siguientes valores deducidos de ejercicios anteriores, en función del radio a_{12} (dato) de la esfera circunscrita al dodecaedro regular dado.

Número de caras "n" del dodecaedro dado

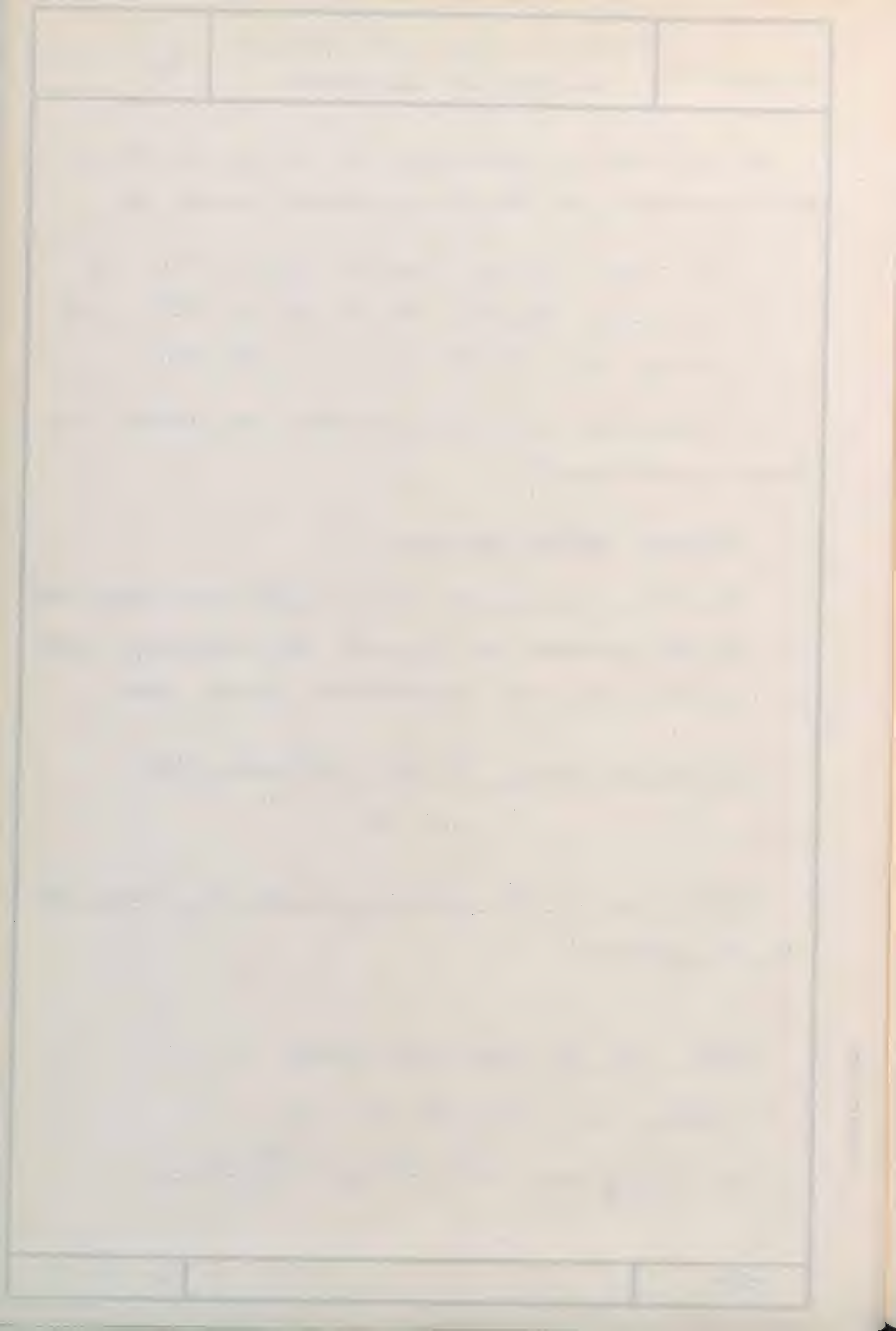
$$n = 12$$

Radio "a_{12}" de la esfera circunscrita al mismo (dato del ejercicio).

Lado "l_{12}" del dodecaedro dado.

Se deduce de la fórm. 30, lám. 4

$$l_{12} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}}\, a_{12} = \frac{4\,(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{12}\, a_{12} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\, a_{12}$$



Radio "b_1" de la esfera tangente a las aristas del poliedro regular dado.

Se deduce de la fórmula 31, lám. 4

$$b_1 = b_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\, a_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{b_1} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} =$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12}\, a_{12} = \frac{3\sqrt{15}+\sqrt{75}-3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{12}\, a_{12} = \frac{2\sqrt{15}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{12}\, a_{12} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{12}\, a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\, a_{12}}$$

Radio "c_{12}" de la esfera inscrita en el mismo.

Se deduce de la fórm. 32, lám. 4

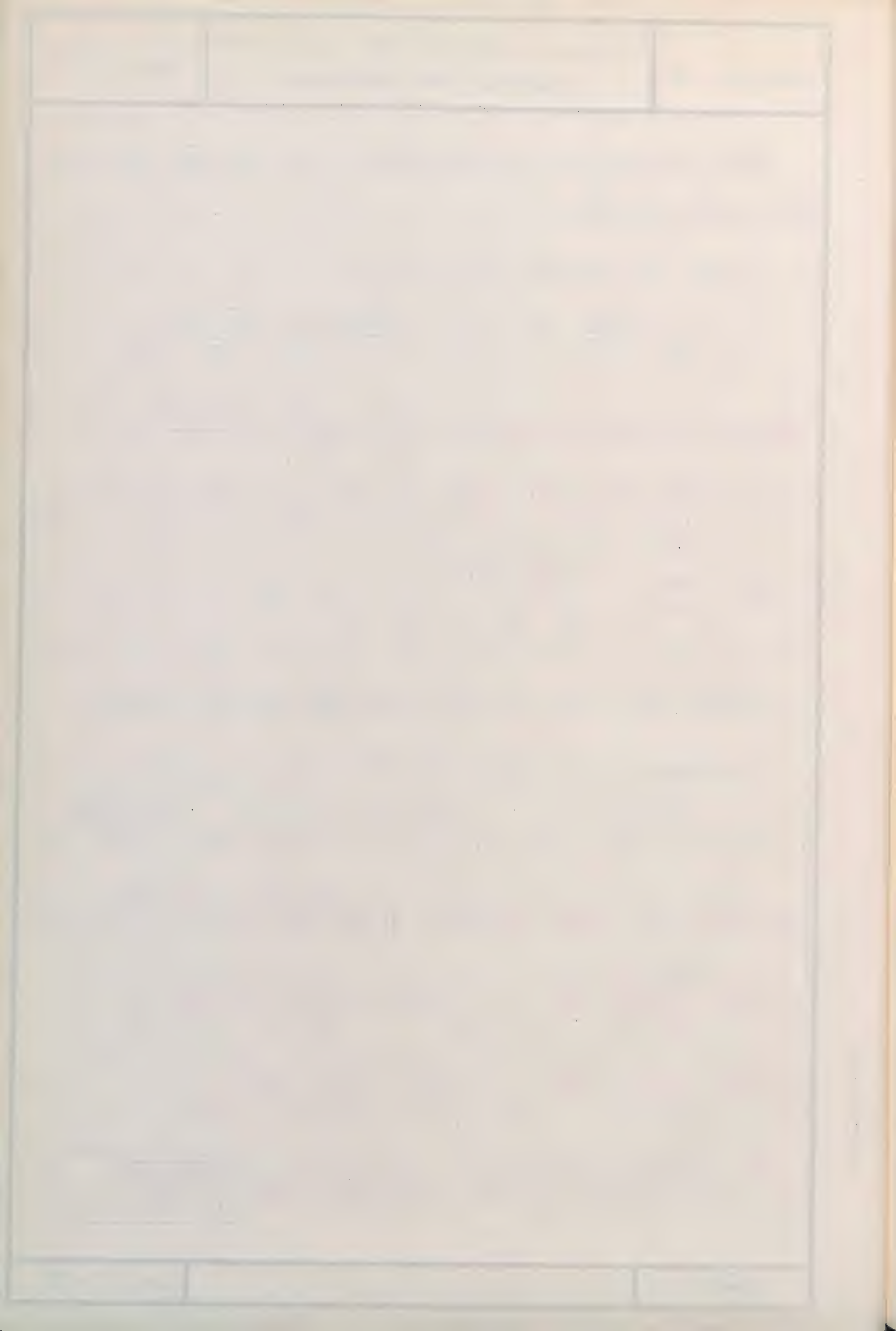
$$c_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{c_{12}} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{40 \times 3^2}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(15+3-2\sqrt{45})}{40 \times 9}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(18-6\sqrt{5})}{40 \times 9}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{40 \times 3}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{150+66\sqrt{5}-50\sqrt{5}-22\times 5}{40 \times 3}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{40+16\sqrt{5}}{40 \times 3}}\, a_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}}$$



Radio "d_{12}" de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del mismo.

Se deduce de la fórm. 33, lám. 4

$$d_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{d_{12}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{10 \times 3^2}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(15+3-2\sqrt{45})}{10 \times 3^2}} \cdot a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(18-6\sqrt{5})}{10 \times 9}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{15}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{15}}\; a_{12} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{12}}$$

Radio "k_{12}" de la circunferencia inscrita al polígono regular de una cara del mismo (apotema).

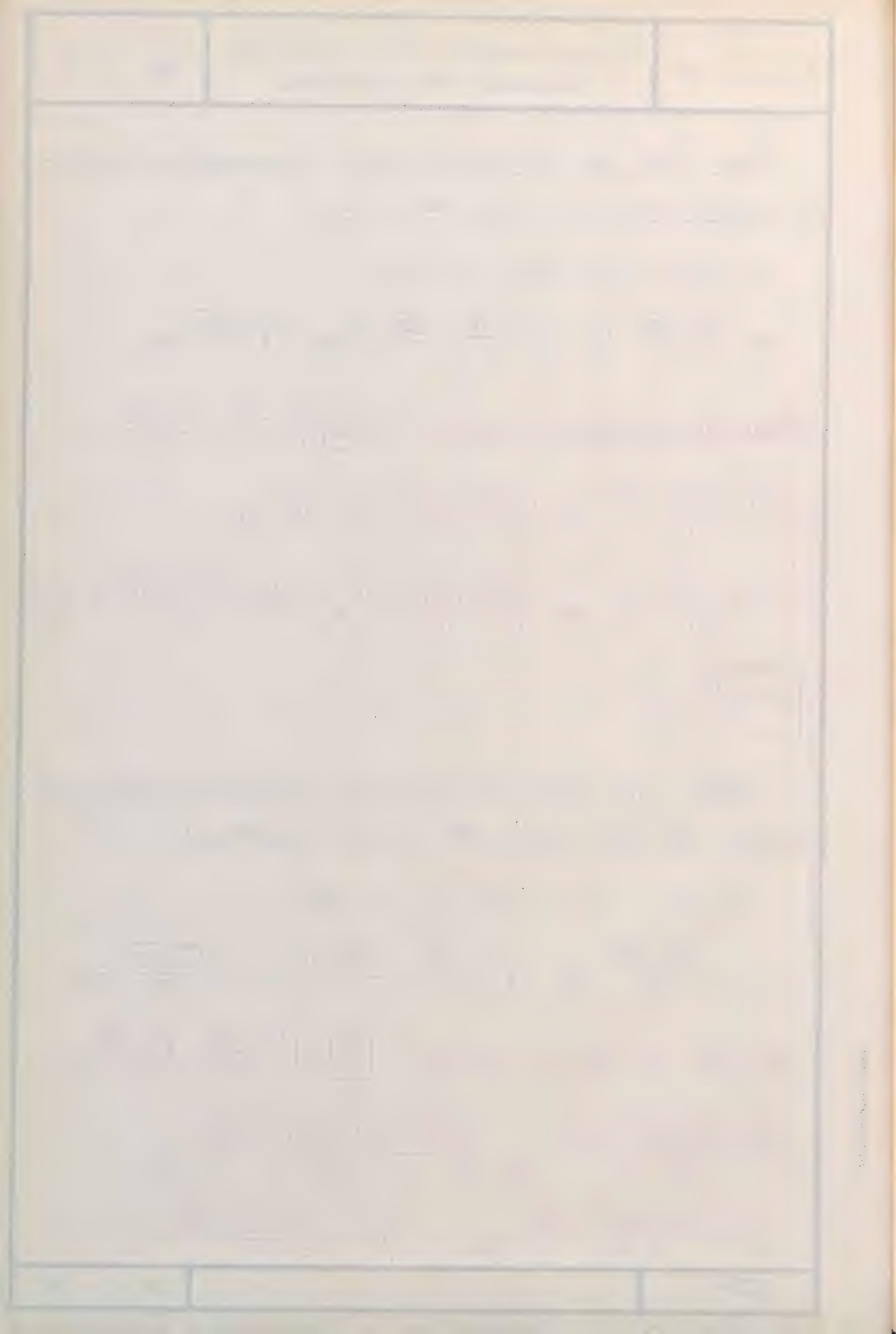
Se deduce de la fórmula 39, lám. 4

$$k_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\; a_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{k_{12}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{20 \times 3^2}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(15+3-2\sqrt{45})}{20 \times 9}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(18-6\sqrt{5})}{20 \times 9}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{10 \times 3}}\; a_{12} =$$



$$= \sqrt{\frac{15 + 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 10}{30}}\, a_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, a_{12}}$$

Ángulo rectilíneo "$2\varphi_{12}$" del diedro del mismo

Se deduce de la fórmula 34, lám. 4

$$\operatorname{sen} \varphi_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \qquad 2\varphi_{12} = 116^\circ\ 33'\ 54{,}2''$$

Tomando como base los valores anteriores, deduciremos los siguientes del poliedro derivado.

Ángulo rectilíneo "$2\alpha_{12}$" del diedro formado por dos caras contiguas del poliedro derivado, en una arista del dodecaedro dado.

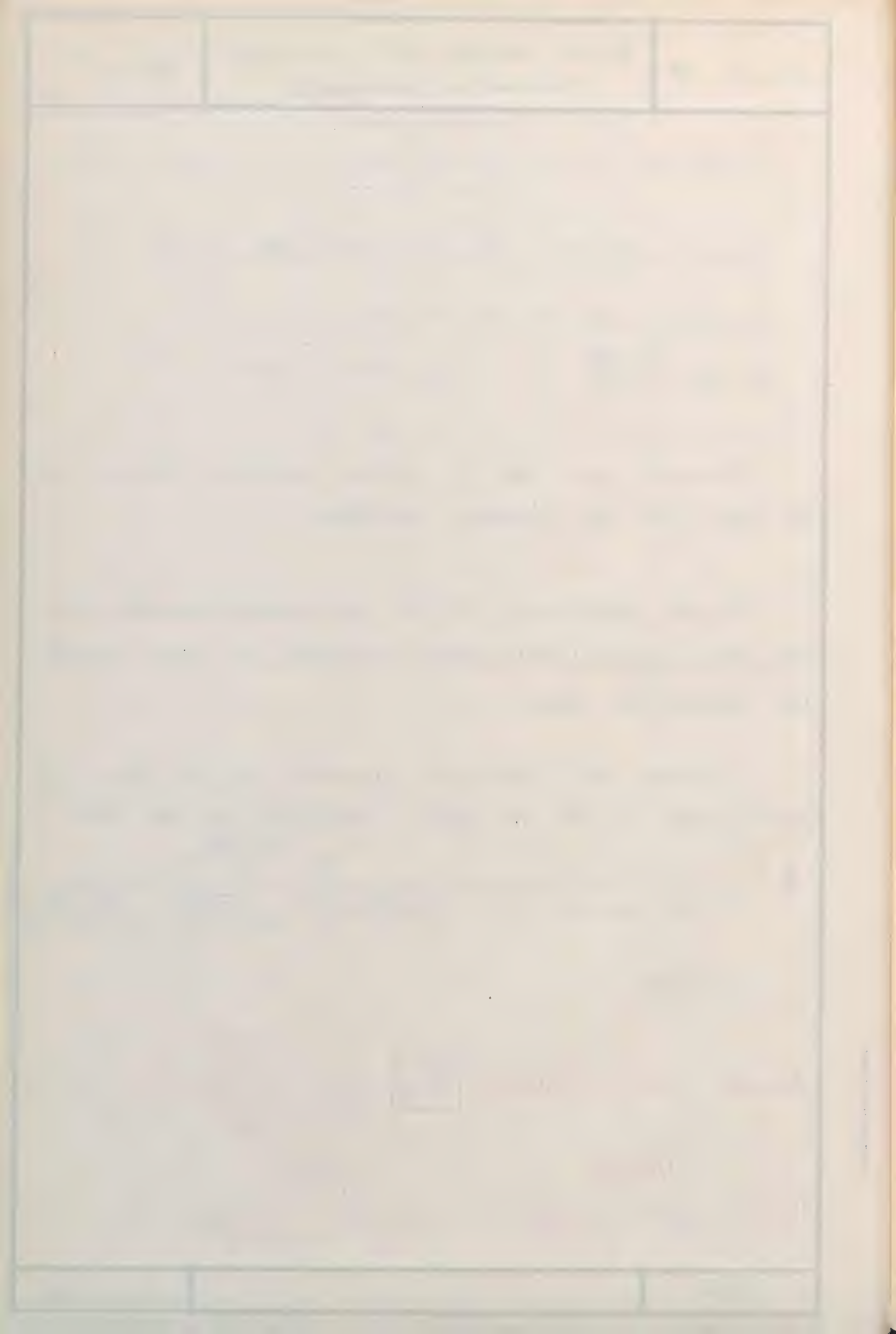
Se deduce de la fórmula general [4] (en lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{a_{12}\, k_{12}}{(k_{12})^2 - a_{12}\, c_{12} + (c_{12})^2} = \frac{a_{12} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, a_{12}}{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, a_{12}\right)^2 - a_{12}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12} + \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)^2}$$

$$= 3 + \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{tg} \alpha_{12}} = \dfrac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}}{\frac{5+\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{5+2\sqrt{5}}{15}} =$

$$= \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}}{\frac{5+\sqrt{5}+10+4\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}}{\frac{15+5\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} =$$



$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})}}{(15+5\sqrt{5}) - \sqrt{60\,(5+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})}}{5\,(3+\sqrt{5}) - 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{25 \times (9+5+6\sqrt{5}) - 4 \times 15 \times (5+2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{350 + 150\sqrt{5} - 300 - 120\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right.}{50 + 30\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})} \times (3\sqrt{5}-5) \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10\,(3\sqrt{5}+5)\,(3\sqrt{5}-5)} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})\,(3\sqrt{5}-5)^2} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10\,(45-25)} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})\,(45+25-30\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10 \times 20} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})\,(70-30\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10 \times 20} =$$

$$= \frac{\sqrt{300\,(5+\sqrt{5})\,(7-3\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10 \times 20} =$$

$$= \frac{\sqrt{3\,(35+7\sqrt{5}-15\sqrt{5}-15)} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right.}{20} =$$

UNE A4 210 X 297



$$= \frac{\sqrt{3\,(20-8\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})} \times (3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})} \times \sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}}{10} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})\,(3+\sqrt{5})^2} + 2\sqrt{45\,(5-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}}{10} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})\,(9+5+6\sqrt{5})} + 2\times 3\times\sqrt{5\,(25-20)}}{10} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})\,(14+6\sqrt{5})} + 30}{10} = \frac{\sqrt{3\times 2\,(5-2\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})} + 6}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6\,(35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} + 6}{2} = 3 + \sqrt{\frac{6\,(5+\sqrt{5})}{4}} = 3 + \sqrt{\frac{3\,(5+\sqrt{5})}{2}} =$$

$$= \boxed{3 + \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}}$$

El valor numérico de α_{12} en grados sexagesimales, será:

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = 3 + \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}} = 6{,}2945564\ldots; \quad \lg \operatorname{tg} \alpha_{12} = 0{,}7989651$$

$$\alpha_{12} = 80^\circ\ 58'\ 22{,}8'' \qquad 2\alpha_{12} = 161^\circ\ 56'\ 45{,}6''$$

El valor $\alpha_{12} < 90^\circ$ nos demuestra la convexidad

UNE A4 210 X 297



del poliedro derivado (ver lám. 25 "Consideraciones previas").

<u>Altura "p" de una cara lateral de la pirámide recta formada en cada cara del dodecaedro dado (cara del poliedro derivado).</u>

Se deduce de la fórmula general [5] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$p = \sqrt{(a_{12} - c_{12})^2 + (k_{12})^2} = \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, a_{12}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12} \qquad \left(= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{30}}\; a_{12} \right)$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{p} = \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, a_{12}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 (a_{12})^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{30}(a_{12})^2} = \sqrt{1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{5+\sqrt{5}}{30}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{30+10+4\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{30} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{45+5\sqrt{5}}{30} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12}}$$

<u>Arista lateral "q" de la pirámide recta regular, o lado igual del triángulo isósceles de una cara del poliedro derivado.</u>

Se deduce de la fórmula general [6] (ver lám. 25) susti-



Tomando en ella los valores particulares de este caso.

$$q = \sqrt{(a_{12} - c_{12})^2 + (d_{12})^2} = \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12} \qquad \left(= \sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{12} \right)$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{q} = \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 (a_{12})^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}(a_{12})^2} = \sqrt{1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5+2\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12} = \boxed{\sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12}}$$

Segmento "t" que se obtiene al unir los extremos de dos lados consecutivos del polígono de una cara del dodecaedro dado.

Es la diagonal del pentágono regular de lado l_{12}; su valor s/ la Geometría racional, se obtiene

$$t = \frac{d_{12}}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{12}}{2} \times \sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{t} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} \times \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\, a_{12} =$

$$= \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{2\sqrt{15}}\, a_{12} = \frac{\sqrt{80}}{2\sqrt{15}}\, a_{12} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{15}}\, a_{12} = 2\sqrt{\frac{5}{15}}\, a_{12} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_{12}}$$



Ángulo rectilíneo del diedro "$2\gamma_{12}$" formado por dos caras laterales contiguas en las aristas de la pirámide recta.

Se deduce de la fórmula general [7] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{sen}\gamma_{12} = \frac{tg}{2\, l_{12}\, p} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} a_{12} \times \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12}}{2 \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} a_{12} \times \sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}} \times \frac{q}{p} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{q}{p} = \frac{0,80\,90\,17\,0 \times 0,64\,62\,51\,8}{0,53\,23\,24\,2} = 0,97\,39\,55\,4\ldots$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\gamma_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\left[2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] : \left[\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]}}$$

$\lg \operatorname{sen}\gamma_{12} = \lg 0,97\,39\,55\,4 = \bar{1},9885\,391$

$\gamma_{12} = 76^\circ\ 53'\ 41,4''$ $\qquad 2\gamma_{12} = 153^\circ\ 47'\ 22,8''$

Ángulo diedro "β_{12}" formado por una cara lateral de la pirámide y su base.

Se deduce de la fórmula general [8] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{sen}\beta_{12} = \frac{a_{12} - c_{12}}{p} = \frac{a_{12} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\; a_{12}}{\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}{\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}}$$



El valor numérico de β_{12}, se obtiene como sigue:

$$\text{sen } \beta_{12} = \frac{1 - 0{,}78\ 46\ 54\ 5\ldots}{0{,}53\ 23\ 24\ 2\ldots} \cong 0{,}38\ 57\ 52\ 7\ldots$$

$$\text{lg. sen } \beta_{12} = \log .\ 0{,}38\ 57\ 52\ 7 = \bar{1},58\ 63\ 090$$

$\beta_{12} = 22°\ 41'\ 25{,}7''$ debiendo verificarse como comprobación (ver fórm. [11], lám. 25)

$$\alpha_{12} = \varphi_{12} + \beta_{12} = \begin{array}{r} 58°\ 16'\ 57{,}1'' \\ +\ 22°\ 41'\ 25{,}7'' \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha_{12} = 80°\ 58'\ 22{,}8''$$

valor coincidente con el ya obtenido en este estudio

Radio "b_2" de la esfera tangente a las aristas laterales de las pirámides rectas cuyas bases son caras del dodecaedro regular dado.

Se deduce de la fórmula general [9] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$b_2 = \sqrt{(a_{12})^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{1 - \left(2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) : 4}\ a_{12} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) : 2}\ a_{12}$$



Radio "c_1" de la esfera inscrita en el poliedro derivado

Se deduce de la fórmula general [10] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_{12}$ en la que $b_1 = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6} a_{12}$, y

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = 3 + \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}} ;$$

de esta última se obtiene:

$$\operatorname{sen} \alpha_{12} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{12}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_{12}}} = \frac{3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{1+\left(3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}\right)^2}}$$ por lo que

$$c_1 = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6} \times \frac{3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{1+\left(3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}\right)^2}}\, a_{12} = 0{,}93\;41\;72\;4 \operatorname{sen} \alpha_{12}\, a_{12}$$

$$\operatorname{lg} \frac{c_1}{a_{12}} = \log 0{,}93\;41\;72\;4 + \operatorname{lg} \operatorname{sen} 80^\circ\, 58'\, 22{,}8'' = \begin{array}{r} \bar{1},970\;42\;70 \\ \bar{1},994\;58\;75 \\ \hline \bar{1},965\;01\;45 \end{array}$$

$$c_1 = 0{,}92\;26\;02\;1 \times a_{12}$$

Este mismo valor se puede deducir, como comprobación, de la fórmula equivalente [10'] (ver lám. 25), en la que

$$c_1 = b_2 \operatorname{sen} \gamma_{12} = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2} \times \operatorname{sen} \gamma_{12} \times a_{12}$$



cuyos valores numéricos son:

$$C_1 = 0.94\,72\,73\,6\ldots \times \operatorname{sen} 76^\circ\ 53'\ 41{,}4'' \times a_{12} =$$

$$= 0.94\,72\,73\,6\ldots \times 0{,}97\,39\,55\,4 \times a_{12} = 0{,}92\,26\,02\,2\ldots\ a_{12}$$

$$C_1 = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\right):2} \times \frac{1+\sqrt5}{4} \times \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\right]:\left[\frac{9+\sqrt5}{6}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\right]} \times a_{12}$$

valor coincidente con el ya obtenido anteriormente.

Area lateral "S" del poliedro derivado

Se obtiene como suma de las áreas laterales de las doce pirámides rectas de base pentagonal regular de lado "l_{12}", cuyas caras laterales son triángulos isósceles de base "l_{12}" y altura "p" ya determinados.

$$S = 12 \times 5 \times \frac{l_{12} \times p}{2} = 30 \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt3}{3} \times \sqrt{\frac{9+\sqrt5}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}} \times (a_{12})^2$$

$$= 30 \times 0{,}71\,36\,44\,2\ldots \times 0{,}53\,23\,24\,2\ldots\ (a_{12})^2 = 11{,}39\,67\,02\,3\,(a_{12})^2$$

Volumen "V" del poliedro derivado

Se obtiene como suma del volumen del dodecaedro dado y de las doce pirámides formadas en sus caras.



$$V = V_{12} + 12 \times \frac{S_5 \times h}{3}$$

siendo "S_5" el área de una cara del dodecaedro, y "h" la altura de la pirámide.

Para obtener V_{12} en función de a_{12}, ver lám. 4, fórms. 41 y 30 que nos dan

$$V_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4}\left(l_{12}\right)^3 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}\,a_{12}\right)^3 = \frac{2\left(5\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)}{9}\left(a_{12}\right)^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{V_{12}} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}\,a_{12}\right)^3 =$

$$= \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{4\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)}{15-3}\,a_{12}\right)^2 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\,a_{12}\right)^3 =$$

$$= \frac{\left(7\sqrt{5}+15\right) \times \left(15\sqrt{15} - 3 \times 15 \times \sqrt{3} + 3\sqrt{15} \times 3 - 3\sqrt{3}\right)}{4 \times 27}\left(a_{12}\right)^3 =$$

$$= \frac{\left(7\sqrt{5}+15\right) \times \left(24\sqrt{15} - 48\sqrt{3}\right)}{4 \times 27}\left(a_{12}\right)^3 = \frac{\left(7\sqrt{5}+15\right)\left(\sqrt{15}-2\sqrt{3}\right) \times 6}{27}\left(a_{12}\right)^3 =$$

$$= \frac{6 \times \left(7\sqrt{75} + 15\sqrt{15} - 14\sqrt{15} - 30\sqrt{3}\right)}{27}\left(a_{12}\right)^3 = \frac{6 \times \left(35\sqrt{3} - 30\sqrt{3} + \sqrt{15}\right)}{27}\left(a_{12}\right)^3 =$$

$$= \boxed{\frac{2\left(5\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)}{9}\left(a_{12}\right)^3}$$

Por otra parte, tenemos que (ver lám. 4, fórm. 40)

$$S_5 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left(l_{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\,a_{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{10 \times (5-\sqrt{5})}}{6}\left(a_{12}\right)^2$$



Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{S_5} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} a_{12} \right)^2 =$

$$= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \frac{15+3-2\sqrt{45}}{9} (a_{12})^2 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \frac{6(3-\sqrt{5})}{9} (a_{12})^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times (3-\sqrt{5})}{6} (a_{12})^2 = \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^2}}{6} (a_{12})^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})}}{6} (a_{12})^2 = \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})(7-3\sqrt{5}) \times 2}}{6} (a_{12})^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times (175+70\sqrt{5}-75\sqrt{5}-150)}}{6} (a_{12})^2 = \frac{\sqrt{2(25-5\sqrt{5})}}{6} (a_{12})^2 =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{6} (a_{12})^2}$$

por otra parte $\quad h = a_{12} - c_{12} = \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) a_{12}$

y finalmente

$$V = V_{12} + 12 \times \frac{S_5 \times h}{3} = \frac{2(5\sqrt{3}+\sqrt{15})}{9} (a_{12})^3 + 4 \times \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{6} \times h \times (a_{12})^2$$

$$= \left[\frac{2(5\sqrt{3}+\sqrt{15})}{9} + \frac{2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \frac{2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3} (a_{12})^2$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{V} = \left[\frac{2(5\sqrt{3}+\sqrt{15})}{9} + \frac{2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) \right] (a_{12})^3 =$$



$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \right] \left(a_{12} \right)^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)\left(5 + 2\sqrt{5} \right)}{15}} \right] \left(a_{12} \right)^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10 \left(25 - 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 10 \right)}{15}} \right] \left(a_{12} \right)^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10 \left(15 - 5\sqrt{5} \right)}{15}} \right] \left(a_{12} \right)^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10 \left(3 - \sqrt{5} \right)}{3}} \right] \left(a_{12} \right)^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} \times \sqrt{3 - \sqrt{5}} \right] \left(a_{12} \right)^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \right] \left(a_{12} \right)^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{50}{6}} + \sqrt{\frac{10}{6}} \right) \right] \left(a_{12} \right)^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{6}{9} \left(\sqrt{\frac{50}{6}} + \sqrt{\frac{10}{6}} \right) \right] \left(a_{12} \right)^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{1}{9} \left(\sqrt{300} + \sqrt{60} \right) \right] \left(a_{12} \right)^3 =$$



$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10(5-\sqrt{5})} - \frac{1}{9} \left(10\sqrt{3} + 2\sqrt{15} \right) \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10(5-\sqrt{5})} - \frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + 2\sqrt{15} \right) \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \boxed{\frac{2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3} (a_{12})^3}$$



En el cuadro sinóptico que damos a continuación, reunimos los resultados anteriores:

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l_{12}	$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\ a_{12}$	$0,713644\ldots\ a_{12}$
b_1	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\ a_{12}$	$0,934172\ldots\ a_{12}$
b_2	$\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2}\ a_{12}$	$0,947274\ldots\ a_{12}$
c_{12}	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\ a_{12}$	$0,794655\ldots\ a_{12}$
c_1	$= \left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\right)\times\left(3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}\right):\sqrt{1+\left(3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}\right)^2}\times a_{12}$ $= \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\times\sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]:\left[\frac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]}\ a_{12}$	$0,922602\ldots\ a_{12}$
d_{12}	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\ a_{12}$	$0,607062\ldots\ a_{12}$
k_{12}	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\ a_{12}$	$0,491124\ldots\ a_{12}$
$2\varphi_{12}$	$\operatorname{sen}\varphi_{12}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ $\quad \varphi_{12}=58^\circ\ 16'\ 57{,}1''$	$\operatorname{sen}\varphi_{12}=0,850651$ $2\varphi_{12}=116^\circ\ 33'\ 54{,}2''$
$2\alpha_{12}$	$\operatorname{tg}\alpha_{12}=3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}$ $\quad \alpha_{12}=80^\circ\ 58'\ 22{,}8''$	$\operatorname{tg}\alpha_{12}=6,294556$ $2\alpha_{12}=161^\circ\ 56'\ 45{,}6''$
$2\gamma_{12}$	$\operatorname{sen}\gamma_{12}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\times\sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]:\left[\frac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]}$	$\operatorname{sen}\gamma_{12}=0,973955$ $2\gamma_{12}=153^\circ\ 47'\ 22{,}8''$
β_{12}	$\operatorname{sen}\beta_{12}=\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}$	$\operatorname{sen}\beta_{12}=0,385753$ $\beta_{12}=22^\circ\ 41'\ 25{,}7''$
p	$\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{12}$	$0,532324\ldots\ a_{12}$
q	$\sqrt{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{12}$	$0,640852\ldots\ a_{12}$
t	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\ a_{12}$	$1,154701\ldots\ a_{12}$
S	$30\times\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\times(a_{12})^2$	$11,396702\ldots\ (a_{12})^2$
V	$\frac{2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3}\ (a_{12})^3$	$3.504874\ldots\ (a_{12})^3$

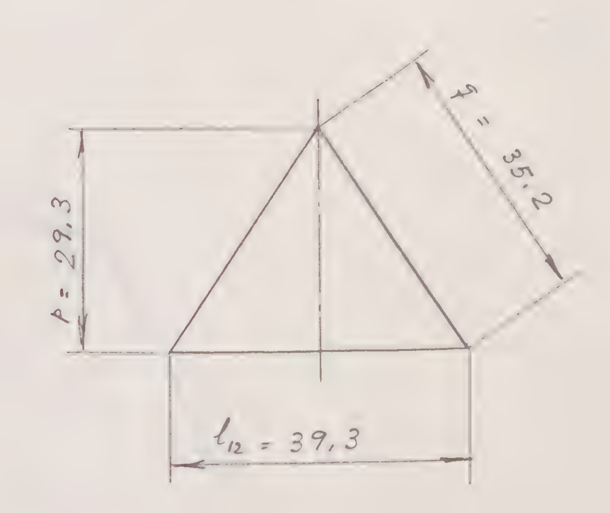
UNE A4 210 X 297



FIGURA CORPÓREA

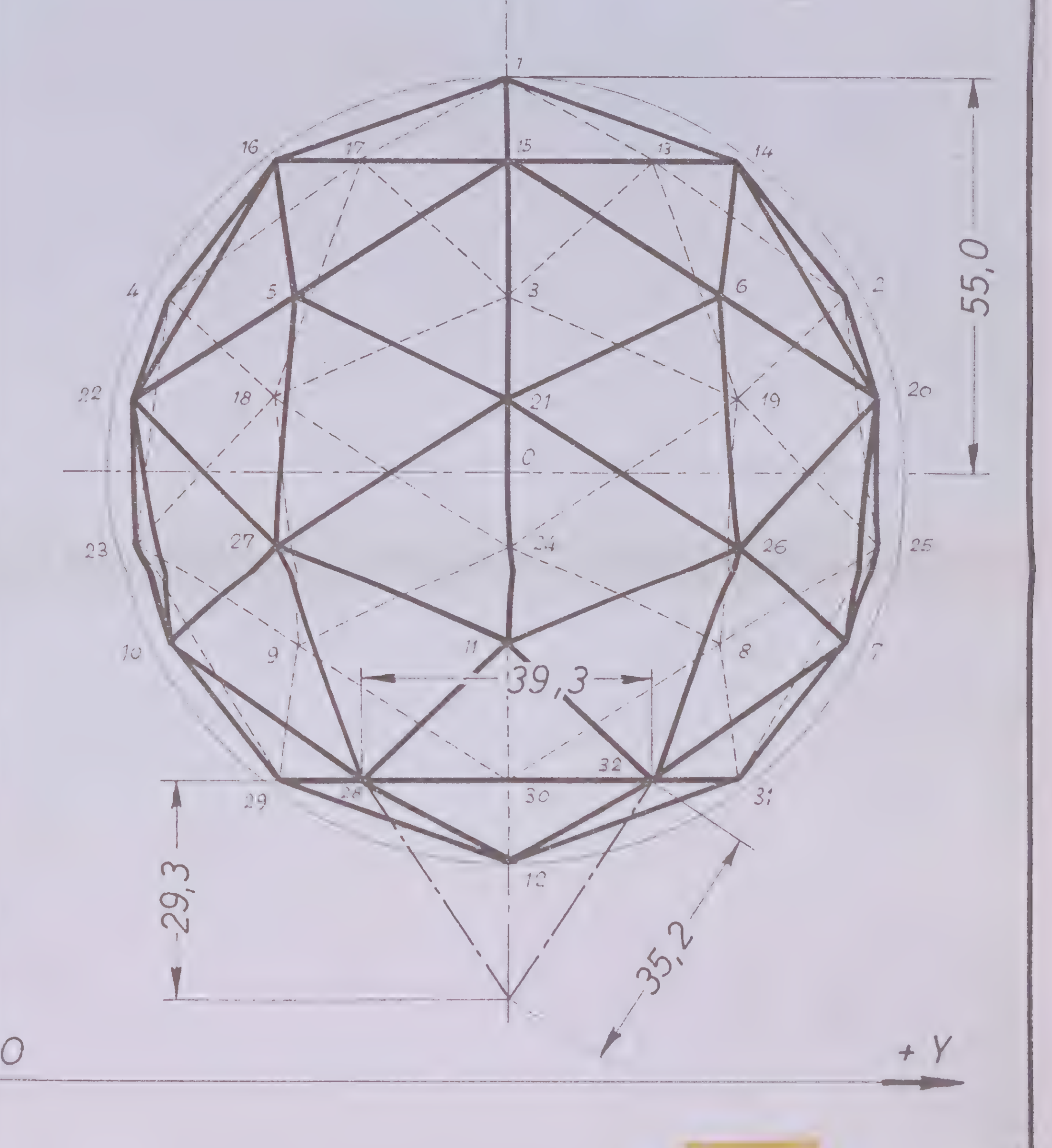
Se obtiene por acoplamiento de 60 caras iguales en forma de triángulos isósceles, de base l_{12} = 39.3 mm y altura p = 29,3 mm; en este triángulo el lado "q" tiene el valor q = 35.2 mm (comprobación).

Para obtener este poliedro se formarán previamente 12 pirámides rectas de base pentagonal regular de lado "l_{12}", cuyas caras laterales son 5 triángulos (ver figura), acoplados por su lado "q".









ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un dodecaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

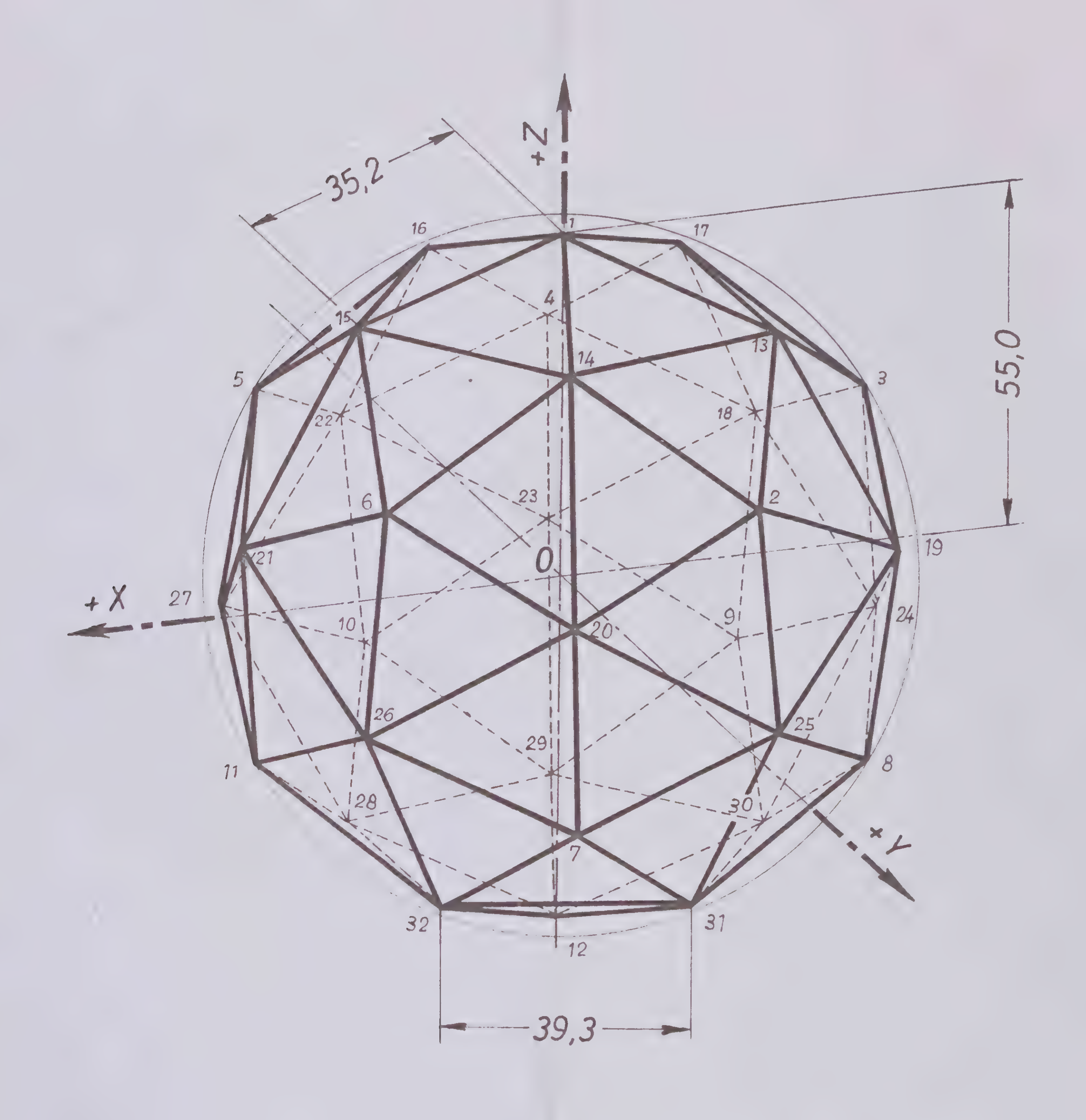
NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Dodecaedro regular .... 13 al 32

Proyecciones centros caras del mismo (vértices del icosaedro conjugado) .... 1 al 12

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:1	Poliedro derivado del dodecaedro regular	Lámina 28 — Curso 19 - 19



Poliedro derivado del dodecaedro regular

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un icosaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera, son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma, de 55 mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS: O (72, 72, 85) mm

a_{20} = 55 mm.

UNE A4 210 X 297

20 - 7 - 71



Al estudiar el ejercicio propuesto en la lámina 25, hemos obtenido unas deducciones previas de carácter general, comunes a los cinco poliedros regulares.

Las fórmulas allí deducidas las aplicaremos sucesivamente en este caso particular del icosaedro regular. El desarrollo del cálculo correspondiente a esta lámina, seguirá pues aquellas directrices, a las que haremos las oportunas referencias.

PROCESO GRÁFICO

En el caso del poliedro derivado del icosaedro regular, el proceso es inmediato, ya que sabemos que el conjugado del icosaedro es un dodecaedro regular, y esta representación ha sido ya realizada en el ejercicio de la lámina 24, cuyo proceso nos permite:

1º Representar el icosaedro regular dado de vértices 1 al 12, inscrito en una esfera de 55 mm de radio.

2º Obtener los vértices 13 al 32 del dodecaedro conjugado inscrito en la misma esfera (estos vértices se han de corresponder con los 21 al 40 de la lámina 24).

3º Unir los vértices 21 al 40 con los correspondientes de cada cara del icosaedro dado.

Al terminar la representación del poliedro derivado,



podemos comprobar que éste es un poliedro cóncavo, de

$C = 3 \times 20 = 60$ caras (ver lám. 25, fórm. [1]); de

$V = 20 + 12 = 32$ vértices (ver lám. 25, fórm. [2]); y de

$A = 30 + 3 \times 20 = 90$ aristas (ver lám. 25, fórm. [3]).

La demostración de la concavidad de este poliedro la haremos analíticamente.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Calculemos previamente los siguientes valores deducidos de ejercicios anteriores, en función del radio a_{20} (dato) de la esfera circunscrita.

Número de caras "n" del icosaedro dado

$$n = 20$$

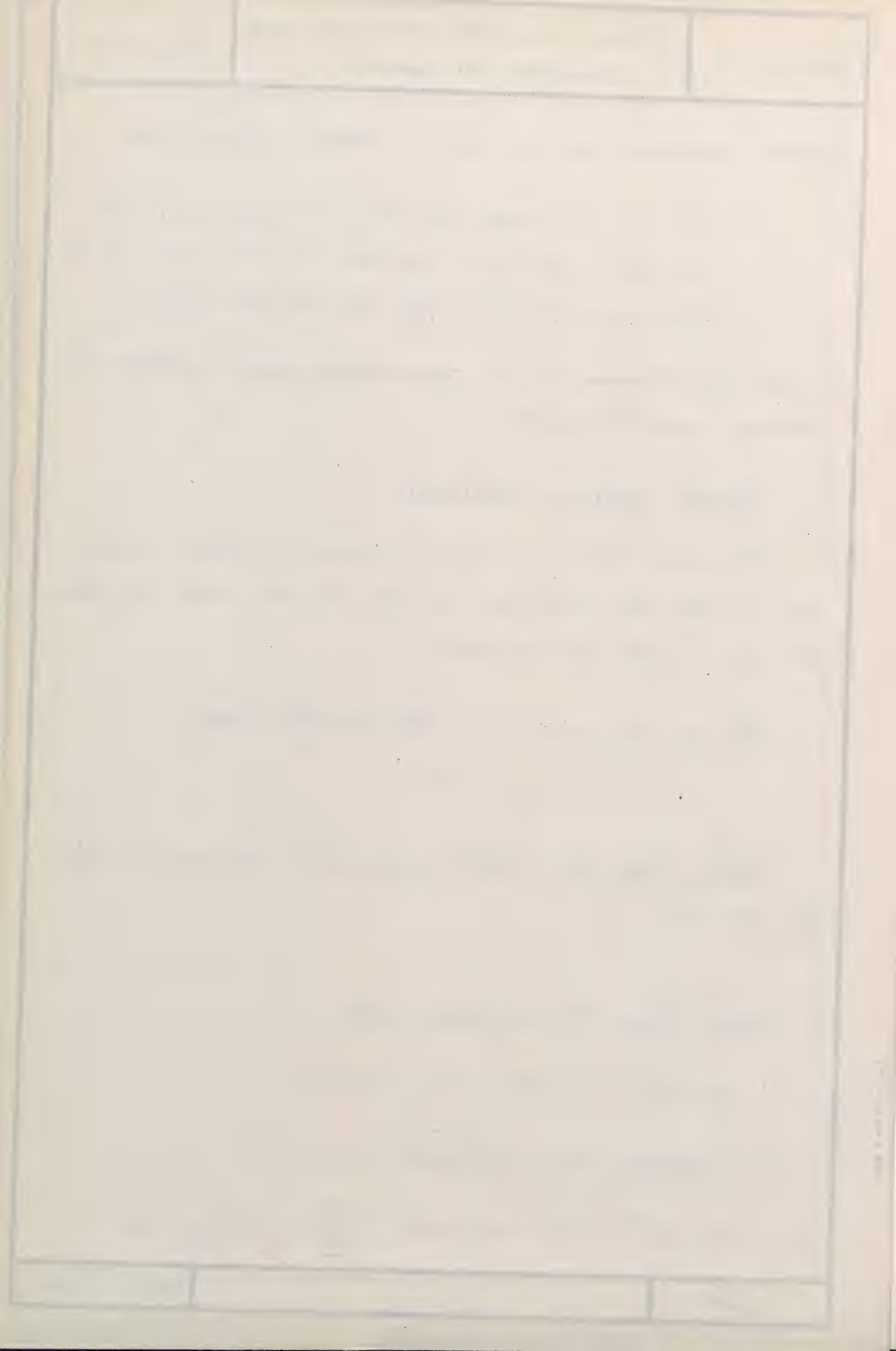
Radio "a_{20}" de la esfera circunscrita al mismo (dato del ejercicio).

Lado "l_{20}" del icosaedro dado

Se deduce de la fórm. 43, lám. 5

$$l_{20} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}\, a_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l_{20}} = \dfrac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\, a_{20} =$



$$= \sqrt{\frac{16}{10 + 2\sqrt{5}}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{8}{5 + \sqrt{5}}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{8(5 - \sqrt{5})}{20}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}}\, a_{20} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}\, a_{20}}$$

Radio "b_1" de la esfera tangente a las aristas del poliedro regular dado

Se deduce de la fórm. 44, lám. 5

$$b_1 = b_{20} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}\, l_{20} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\, a_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{b_1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}}\, a_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^2}{16 \times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})}{8 \times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{20}}\, a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5}{20}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{20}}\, a_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\, a_{20}}$$

Radio "c_{20}" de la esfera inscrita en el mismo

Se deduce de la fórm. 45, lám. 5.

$$c_{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}\, l_{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \times \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\, a_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{c_{20}} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \times \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}}\, a_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})(3\sqrt{3} + \sqrt{15})^2}{12 \times 12 \times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(27 + 15 + 6\sqrt{45})}{6 \times 12 \times 5}}\, a_{20} =$$



$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(42+18\sqrt{5})}{6\times 12\times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{12\times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{35-7\sqrt{5}+15\sqrt{5}-15}{12\times 5}}\, a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{12\times 5}}\, a_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{20}}$$

Radio "d_{20}" de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del mismo.

Se deduce de la fórm. 46, lám. 5

$$d_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{15}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, a_{20}$$

Radio "k_{20}" de la circunferencia inscrita al polígono regular de una cara del mismo (apotema).

Se deduce de la fórm. 53, lám. 5.

$$k_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6}\, l_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{12\times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}\, a_{20}$$

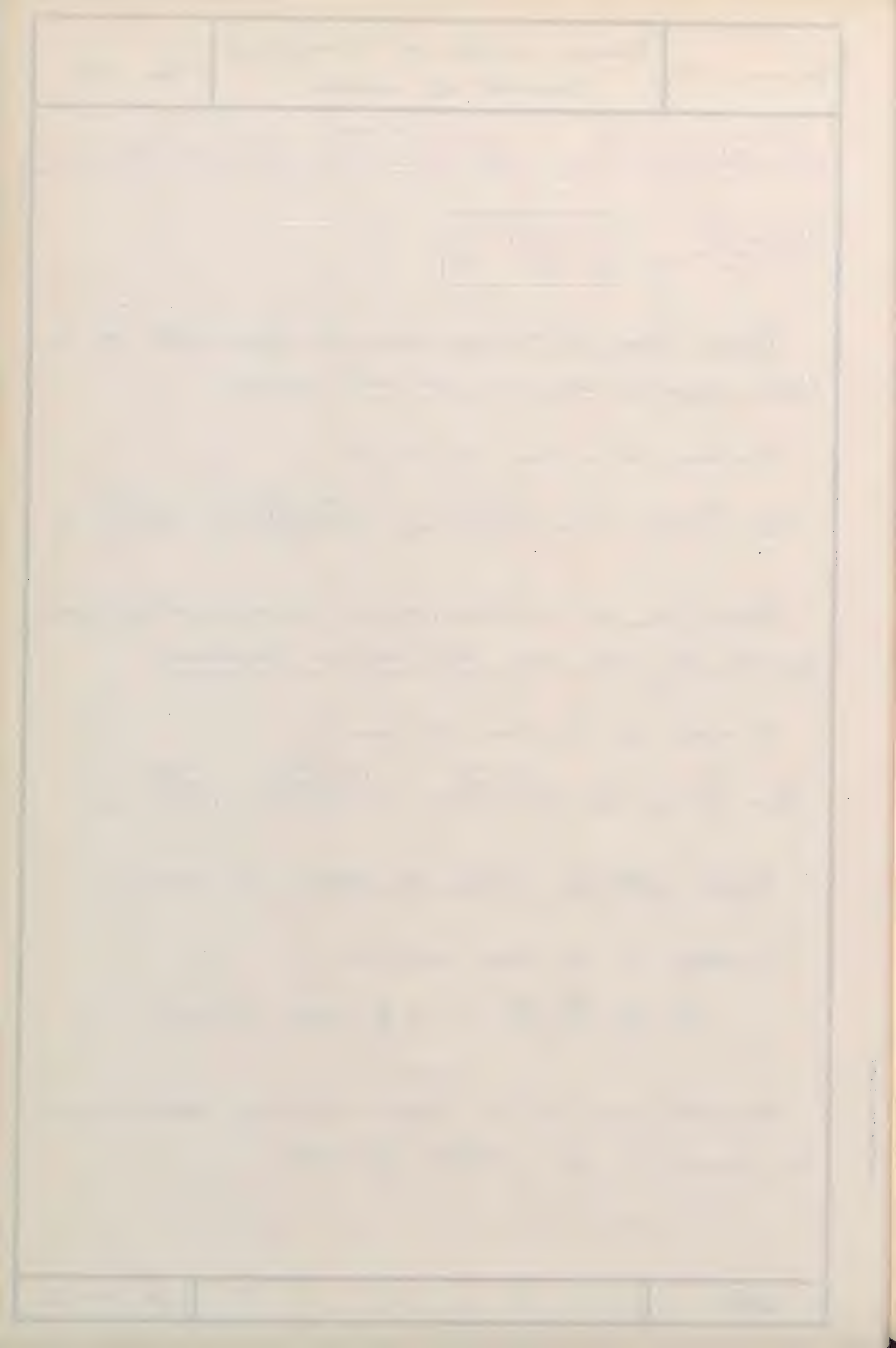
Ángulo rectilíneo "$2\varphi_{20}$" del diedro del mismo.

Se deduce de la fórm. 47, lám. 5

$$\operatorname{sen} \varphi_{20} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6} \qquad 2\varphi_{20} = 138^\circ\ 11'\ 22{,}8''$$

Tomando como base los valores anteriores, deduciremos los siguientes del poliedro derivado

UNE A4 210 X 297



<u>Angulo rectilíneo "$2\,\alpha_{20}$" del diedro formado por dos caras contiguas del poliedro derivado, en una arista del icosaedro dado.</u>

Se deduce de la fórmula general [4] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$tg.\ \alpha_{20} = \frac{a_{20}\ k_{20}}{(k_{20})^2 - a_{20}\ c_{20} + (c_{20})^2} = \frac{a_{20} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}\ a_{20}}{\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}\ a_{20}\right)^2 - a_{20}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\ a_{20} + \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\ a_{20}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{6\,(5-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{tg\ \alpha_{20}} = \frac{a_{20}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}} \times a_{20}}{\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}\ a_{20}\right)^2 - a_{20}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \times a_{20} + \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\ a_{20}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}}{\frac{5-\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{5+2\sqrt{5}}{15}} = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}}{\frac{5-\sqrt{5}+10+4\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5-\sqrt{5})}}{15+3\sqrt{5} - \sqrt{\frac{30^2\,(5+2\sqrt{5})}{15}}} = \frac{\sqrt{30\,(5-\sqrt{5})}}{3\,(5+\sqrt{5}) - \sqrt{60\,(5+2\sqrt{5})}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5-\sqrt{5})}}{3\,(5+\sqrt{5}) - 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{30\,(5-\sqrt{5})} \times \left[3\,(5+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{9 \times (25+5+10\sqrt{5}) - 4 \times 15 \times (5+2\sqrt{5})} =$$

UNE A4 210 X 297



$$= \frac{3\sqrt{30\,(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})^2} + 2\sqrt{30 \times 15 \times (5-\sqrt{5})\,(5+2\sqrt{5})}}{270 + 90\sqrt{5} - 300 - 120\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{30\,(25-5)(5+\sqrt{5})} + 2 \times 15\sqrt{2\,(25 - 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 10)}}{-30\sqrt{5} - 30} =$$

$$= \frac{3\sqrt{30 \times 20 \times (5+\sqrt{5})} + 30\sqrt{2\,(15+5\sqrt{5})}}{-(30\sqrt{5}+30)} = -\frac{3 \times 10\sqrt{6(5+\sqrt{5})} + 30\sqrt{10\,(3+\sqrt{5})}}{30\,(\sqrt{5}+1)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{6\,(5+\sqrt{5})} + \sqrt{10\,(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{5}+1} = -\frac{\sqrt{6\,(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2} + \sqrt{10\,(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}}{4} =$$

$$= -\frac{\sqrt{6\,(5+\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})} + \sqrt{10\,(3+\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}}{4} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3\,(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5\,(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}{4} = -$$

$$= -\frac{\sqrt{3\,(15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5)} + \sqrt{5\,(9-5)}}{2} = -\frac{\sqrt{3\,(10-2\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2} =$$

$$= \boxed{-\frac{\sqrt{6\,(5-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2}}$$

El valor numérico de α_{20} en grados sexagesimales, será:

$$\text{tg}\,\alpha_{20} = -\frac{\sqrt{6\,(5-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2} = -4,2722158 = \text{tg}\,(\pi-\delta) = -\text{tg}\,\delta$$

$$\text{tg}\,\delta = 4,2722158$$

$\lg \operatorname{tg} \delta = \lg. 4,27\ 22\ 15\ 8 = 0.6306\ 532$

$\delta = 76^\circ\ 49'\ 33{,}3''$ $\qquad \alpha_{20} = 180^\circ - 76^\circ\ 49'\ 33{,}3'' = 103^\circ\ 10'\ 26{,}7''$

y $\qquad 2\ \alpha_{20} = 206^\circ\ 20'\ 53{,}4''$

El valor de $\alpha_{20} > 90^\circ$ nos demuestra la concavidad del poliedro derivado (ver lám. 25 "Consideraciones previas").

Altura "p" de una cara lateral de la pirámide recta formada en cada cara del icosaedro dado (cara del poliedro derivado).

Se deduce de la fórmula general [5] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$p = \sqrt{(a_{20} - c_{20})^2 + (k_{20})^2} = \sqrt{\left[a_{20} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\ a_{20}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{30}}\ a_{20}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\right)^2 + \frac{5-\sqrt5}{30}} \times a_{20} = \sqrt{\frac{15+\sqrt5}{10} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}}\ a_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{p} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\right)^2 + \frac{5-\sqrt5}{30}}\ a_{20} =$

$$= \sqrt{1 + \frac{5+2\sqrt5}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}} + \frac{5-\sqrt5}{30}}\ a_{20} = \sqrt{\frac{30+10+4\sqrt5+5-\sqrt5}{30} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}}\ a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{45+3\sqrt5}{30} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}}\ a_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{15+\sqrt5}{10} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}}\ a_{20}}$$



Arista lateral "q" de la pirámide recta regular, o lado igual del triángulo isósceles de una cara del poliedro derivado.

Se deduce de la fórmula general [6] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$q = \sqrt{(a_{20} - c_{20})^2 + (d_{20})^2} = \sqrt{\left[a_{20} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{20}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, a_{20}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{20} = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $q = \sqrt{\left[a_{20} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{20}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, a_{20}\right)^2} =$

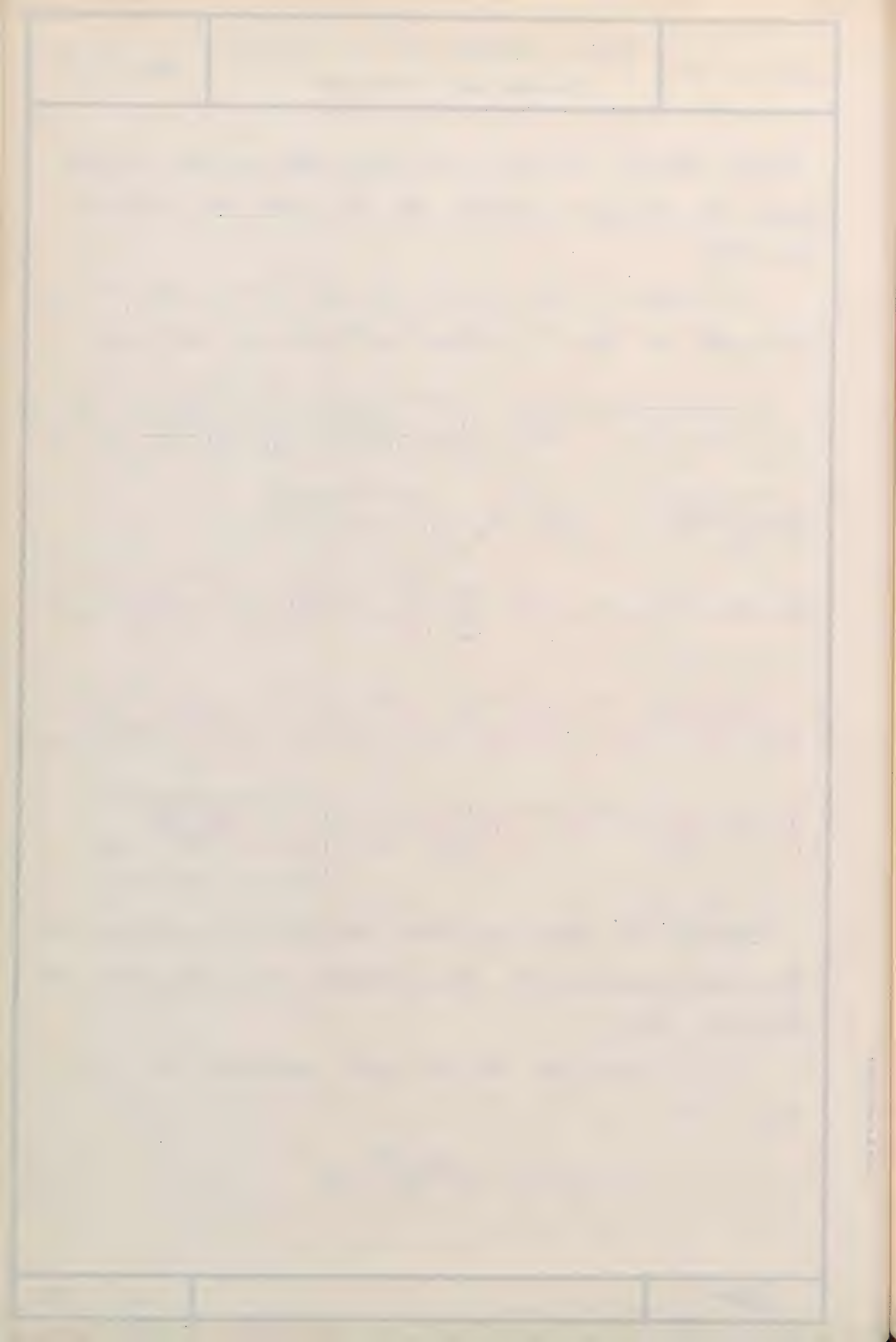
$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 (a_{20})^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}(a_{20})^2} = \sqrt{1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5+2\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{20} = \boxed{\sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{20}}$$

Segmento "t" que se obtiene al unir los extremos de dos lados consecutivos del polígono de una cara del icosaedro dado.

Es el tercer lado del triángulo equilátero de una cara, o sea

$$t = l_{20} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\; a_{20}$$



Angulo rectilíneo del diedro "$2\gamma_{20}$" formado por dos caras laterales contiguas en las aristas de la pirámide recta.

Se deduce de la fórmula general [7] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso

$$\operatorname{sen}\gamma_{20} = \frac{t\,q}{2\,l_{20}\,p} = \frac{l_{20}\,q}{2\,l_{20}\,p} = \frac{1}{2}\times\frac{q}{p} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\;a_{20}}{\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\;a_{20}}$$

$$= \frac{0,64\ 08\ 51\ 8\ldots}{2\times 0,36\ 64\ 66\ 7\ldots} = \frac{0,64\ 08\ 51\ 8\ldots}{0,73\ 29\ 33\ 4\ldots} = 0,87\ 43\ 65\ 7\ldots$$

$$\operatorname{sen}\gamma_{20} = \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] : \left[4\cdot\left(\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]}$$

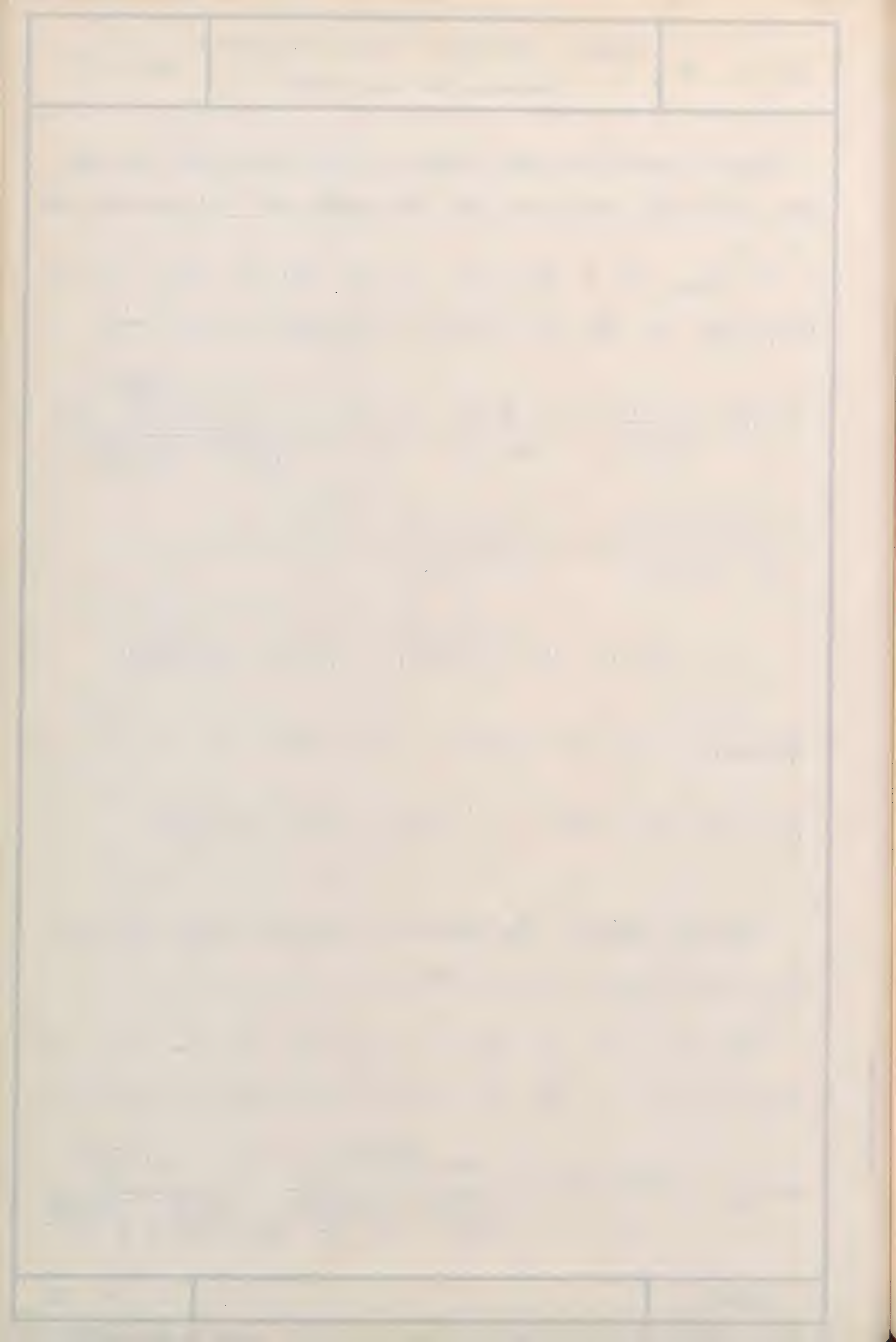
$$\lg \operatorname{sen}\gamma_{20} = \lg 0,87\ 43\ 65\ 7 = \bar{1},9416\ 931$$

$$\gamma_{20} = 60^\circ\ 58'\ 12,0'' \qquad 2\gamma_{20} = 121^\circ\ 56'\ 24,0''$$

Angulo diedro "β_{20}" formado por una cara lateral de la pirámide y su base.

Se deduce de la fórmula general [8] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso

$$\operatorname{sen}\beta_{20} = \frac{a_{20}-c_{20}}{p} = \frac{a_{20}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\;a_{20}}{\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\;a_{20}} = \frac{1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}{\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}}$$



El valor numérico de β_{20}, se obtiene a continuación:

$$\operatorname{sen} \beta_{20} = \frac{1 - 0,79\ 46\ 54\ 5\ldots}{0,36\ 64\ 66\ 7\ldots} = \frac{0,20\ 53\ 45\ 5\ldots}{0,36\ 64\ 66\ 7\ldots} = 0,56\ 03\ 38\ 8\ldots$$

$$\lg \operatorname{sen} \beta_{20} = \lg.\ 0,56\ 03\ 38\ 8 \qquad \beta_{20} = 34^\circ\ 4'\ 45,3''$$

debiendo verificarse como comprobación (ver fórm. [11], lám. 25)

$$\alpha_{20} = \varphi_{20} + \beta_{20} = 69^\circ\ 5'\ 41,4'' + 34^\circ\ 4'\ 45,3''$$

$$\alpha_{20} = 103^\circ\ 10'\ 26,7''$$

valor coincidente con el ya obtenido en este estudio.

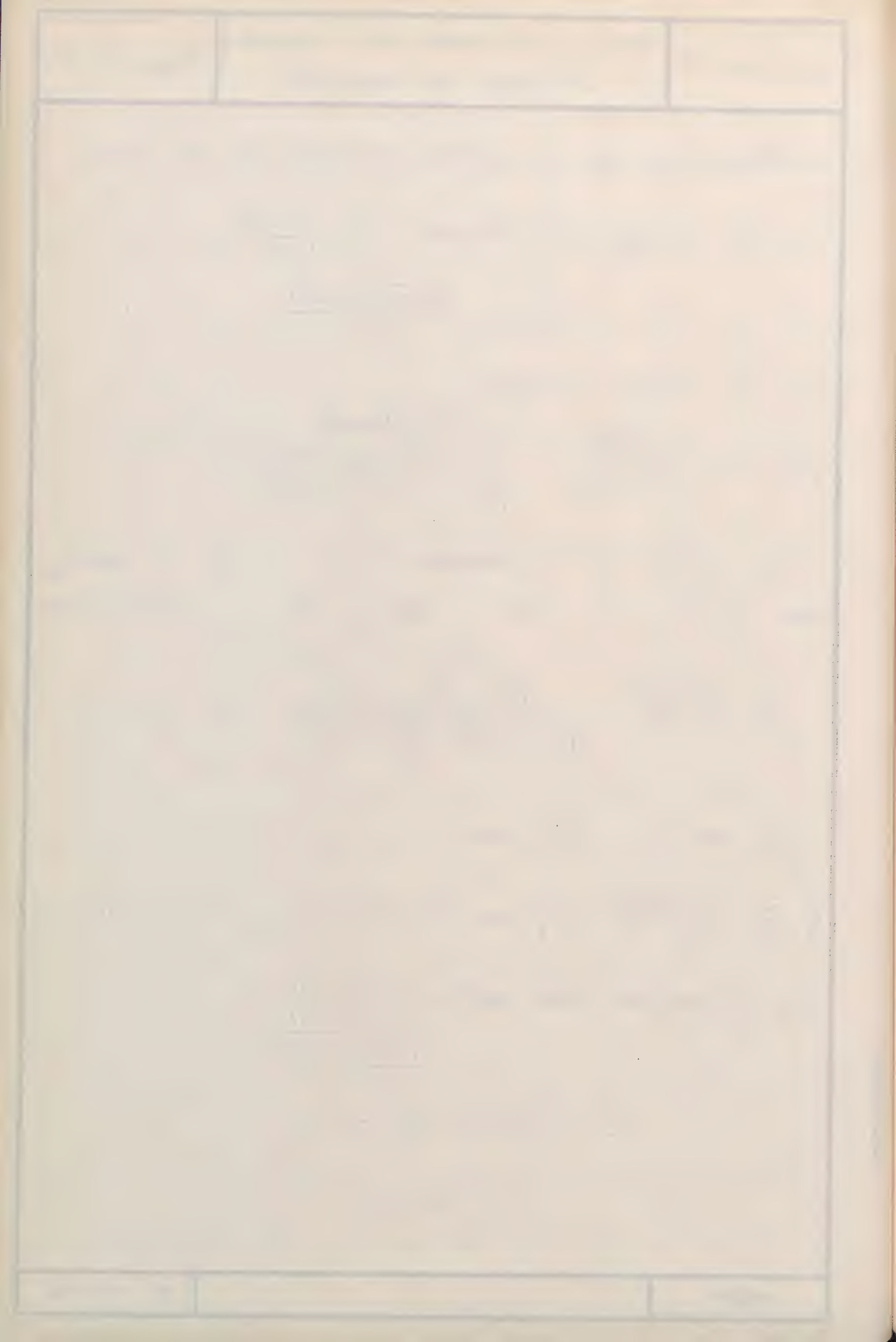
Radio "b_2" de la esfera tangente a las aristas laterales de las pirámides rectas cuyas bases son caras del icosaedro regular dado.

Se deduce de la fórmula general [9] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$b_2 = \sqrt{(a_{20})^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{1 - \left(2 - 2\sqrt{\frac{5+3\sqrt{5}}{15}}\right) : 4}\ a_{20} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) : 2} \cdot a_{20}$$

Radio "c_1" de la esfera inscrita en el poliedro derivado

Se deduce de la fórmula general [10] (ver lám. 25)



Este mismo valor se puede deducir, como comprobación, de la fórmula equivalente [10'] (ver lám. 25), en la que

$$c_1 = b_2 \text{ sen } \gamma_{20} = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2} \times \text{sen } \gamma_{20} \times a_{20}$$

cuyo valor numérico es

$$c_1 = 0,94\ 72\ 73\ 6\ldots \times \text{sen } 60°\ 58'\ 12,0'' \times a_{20} = 0,94\ 72\ 73\ 6\ldots \times$$

$$\times\ 0,87\ 43\ 65\ 7\ldots \times a_{20} = 0,82\ 82\ 63\ 5\ldots\ a_{20}$$

valor coincidente con el ya obtenido anteriormente, y por lo tanto:

$$c_1 = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2} \times \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] : \left[4\times\left(\frac{15+\sqrt{5}}{10} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]} \times a_{20}$$

Area lateral "S" del poliedro derivado

Se obtiene como suma de las áreas laterales de las veinte pirámides rectas de base triangular regular de lado "l_{20}", cuyas caras laterales son triángulos isósceles de base "l_{20}" y altura "p", valores ya determinados.

$$S = 20 \times 3 \times \frac{l_{20} \times p}{2} = 30 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} \times (a_{20})^2$$

$$= 30 \times 1,05\ 14\ 62\ 2\ldots \times 0,36\ 64\ 66\ 7\ldots (a_{20})^2 = 11,55\ 97\ 76\ 5\ldots (a_{20})^2$$



Volumen "V" del poliedro derivado

Se obtiene como suma del volumen del icosaedro dado y de las veinte pirámides formadas en sus caras.

$$V = V_{20} + 20 \times \frac{S_3 \times h}{3}$$

siendo "S_3" el área de una cara del icosaedro, y "h" la altura de la pirámide.

Para obtener V_{20} en función de a_{20}, ver lám. 5, fórmulas 55 y 43 que nos dan

$$V_{20} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12}\left(l_{20}\right)^3 = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\; a_{20}\right)^3 = \frac{\sqrt{8\left(5+\sqrt{5}\right)}}{3}\left(a_{20}\right)^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{V_{20}} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\right)^3 \left(a_{20}\right)^3 =$

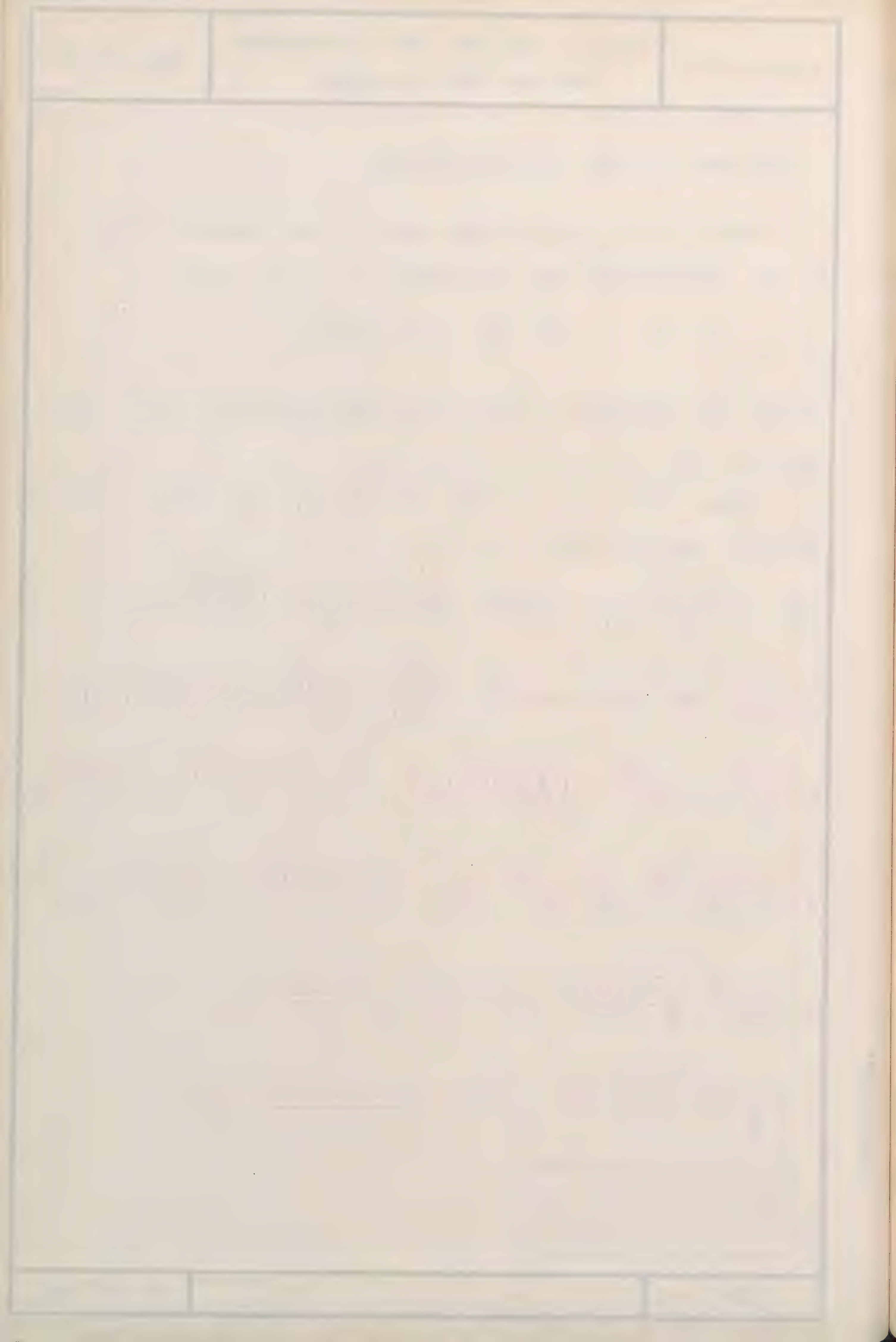
$$= \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \frac{10-2\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{\frac{2\left(5-\sqrt{5}\right)}{5}}\left(a_{20}\right)^3 = \frac{\left(15+5\sqrt{5}\right)\left(10-2\sqrt{5}\right)}{5 \times 12} \times \sqrt{\frac{2\left(5-\sqrt{5}\right)}{5}}\left(a_{20}\right)^3$$

$$= \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{6} \times \sqrt{\frac{2\left(5-\sqrt{5}\right)}{5}} \times \left(a_{20}\right)^3 = \frac{15+5\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5}{6}\sqrt{\frac{2\left(5-\sqrt{5}\right)}{5}}\left(a_{20}\right)^3 =$$

$$= \frac{10+2\sqrt{5}}{6}\sqrt{\frac{2\left(5-\sqrt{5}\right)}{5}}\left(a_{20}\right)^3 = \frac{5+\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2\left(5-\sqrt{5}\right)}{5}}\left(a_{20}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)^2}{5}}\left(a_{20}\right)^2 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2 \times 20 \times \left(5+\sqrt{5}\right)}{5}}\left(a_{20}\right)^3 =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{8\left(5+\sqrt{5}\right)}}{3}\left(a_{20}\right)^2}$$



Igualmente "h" en función de "a_{20}" valdrá

$$h = (a_{20} - c_{20}) = \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)$$

y "S_3", también en función de "a_{20}" valdrá (ver fórmulas 43 y 54, lám. 5)

$$S_3 = \frac{5\sqrt{3}}{20}\,(l_{20})^2 = \frac{5\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\,a_{20}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{10+2\sqrt{5}}\,(a_{20})^2 =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}}\,(a_{20})^2 = \frac{2\,(5-\sqrt{5})\,\sqrt{3}}{20}\,(a_{20})^2 = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{10}\,(a_{20})^2$$

Sustituyendo los valores de V_{20}, h y S_3 en la fórmula inicial, tendremos:

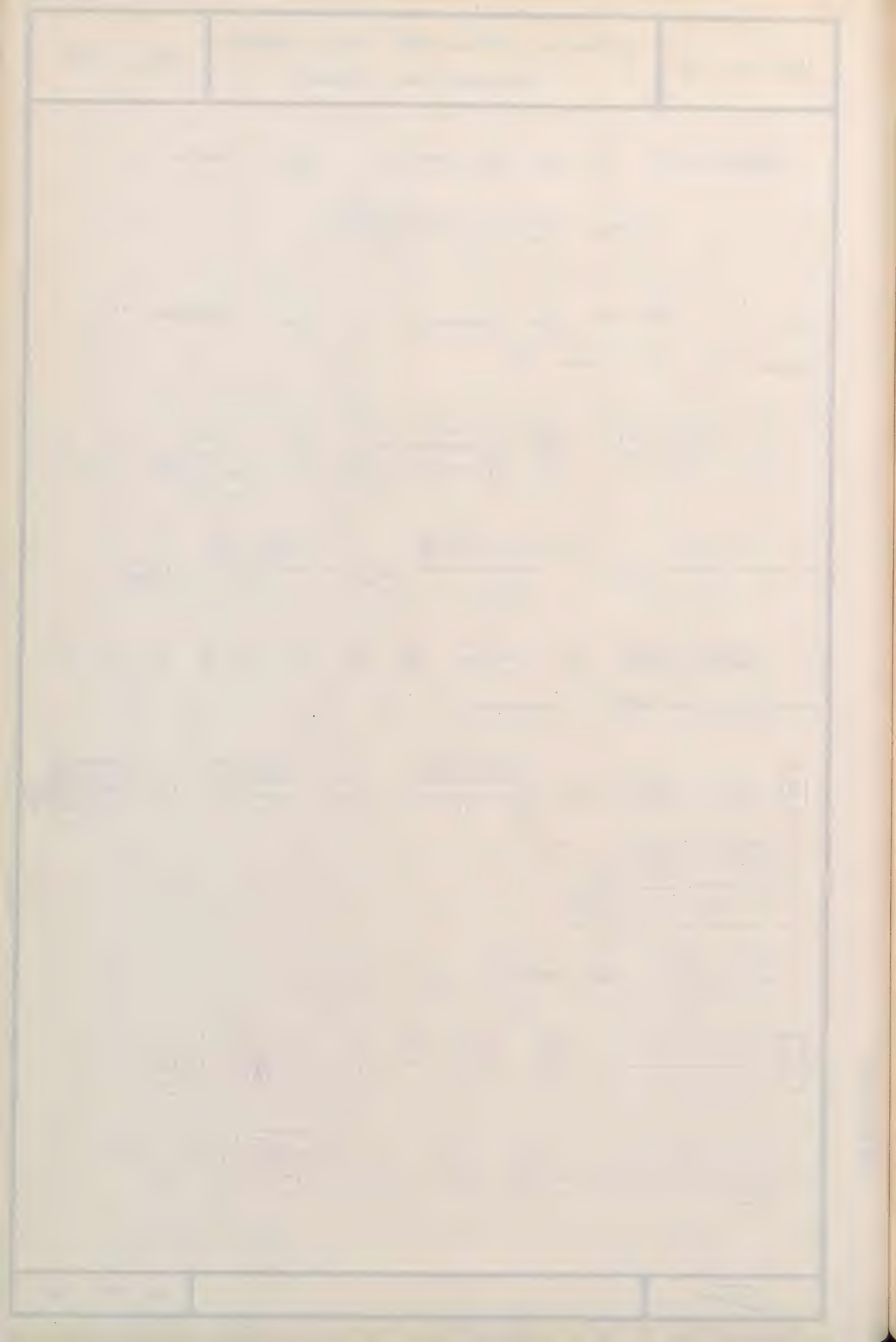
$$\boxed{V} = V_{20} + \frac{20}{3} \times S_3 \times h = \left[\frac{\sqrt{8\,(5+\sqrt{5})}}{3} + \frac{20}{3} \times \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{10} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right](a_{20})^3$$

$$= \boxed{\frac{10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}}{3}\,(a_{20})^3}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{V} = \left[\frac{\sqrt{8\,(5+\sqrt{5})}}{3} + \frac{20}{3} \times \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{10} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right](a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8\,(5+\sqrt{5})} + 2\,(5\sqrt{3}-\sqrt{15}) \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right](a_{20})^3 =$$



$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + (10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) - 2(5\sqrt{3} - \sqrt{15}) \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right](a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + (10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) - 2\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5\sqrt{3}-\sqrt{15})^2}{15}}\right](a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + (10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) - 2\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(75+15-10\sqrt{45})}{15}}\right](a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + (10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) - 2\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(90-30\sqrt{5})}{15}}\right](a_{20})^3 =$$

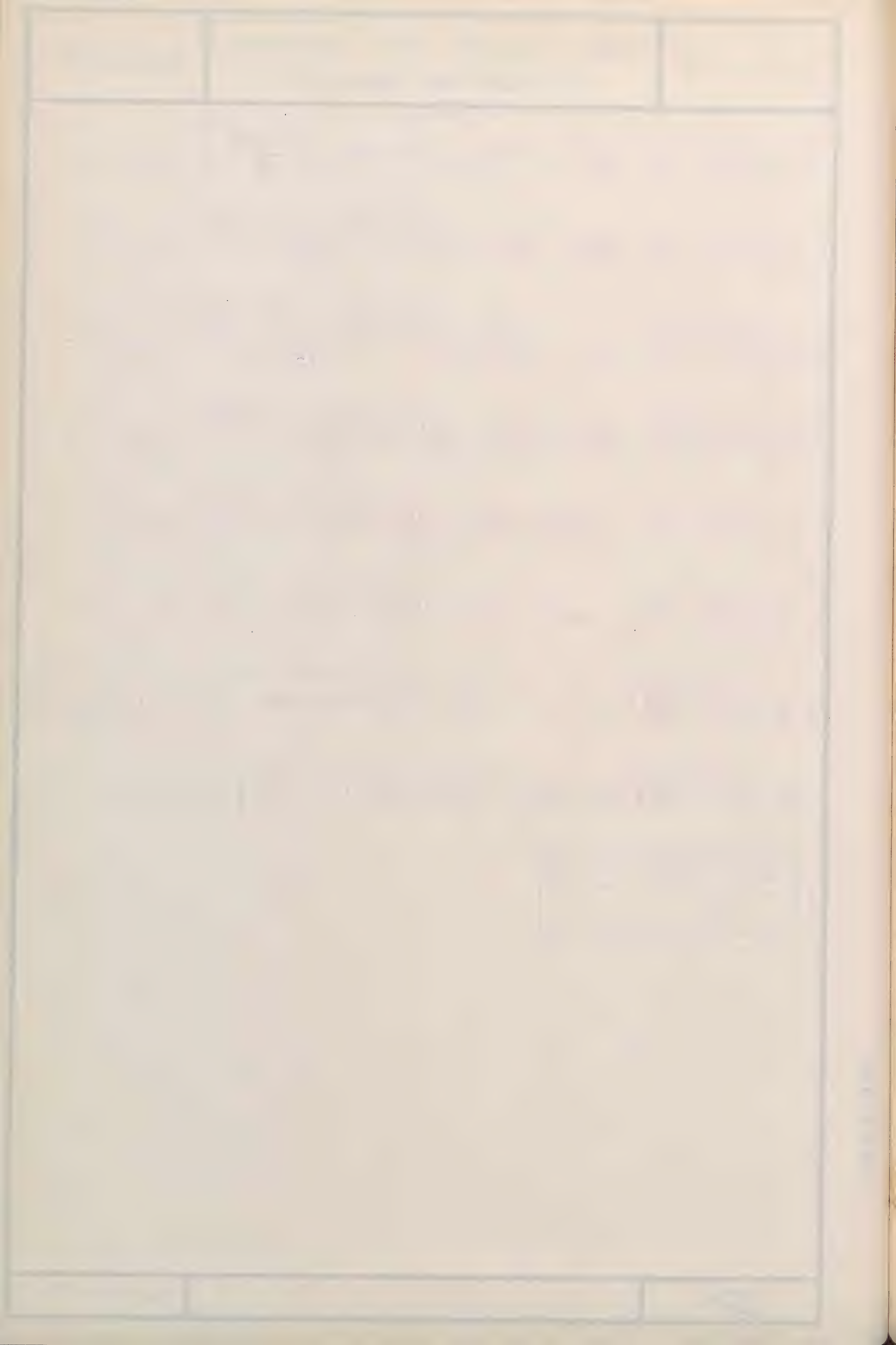
$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + (10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) - 2\sqrt{(5+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}\right](a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + (10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) - \sqrt{8(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}\right](a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + (10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) - \sqrt{8(15+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10)}\right](a_{20})^3 =$$

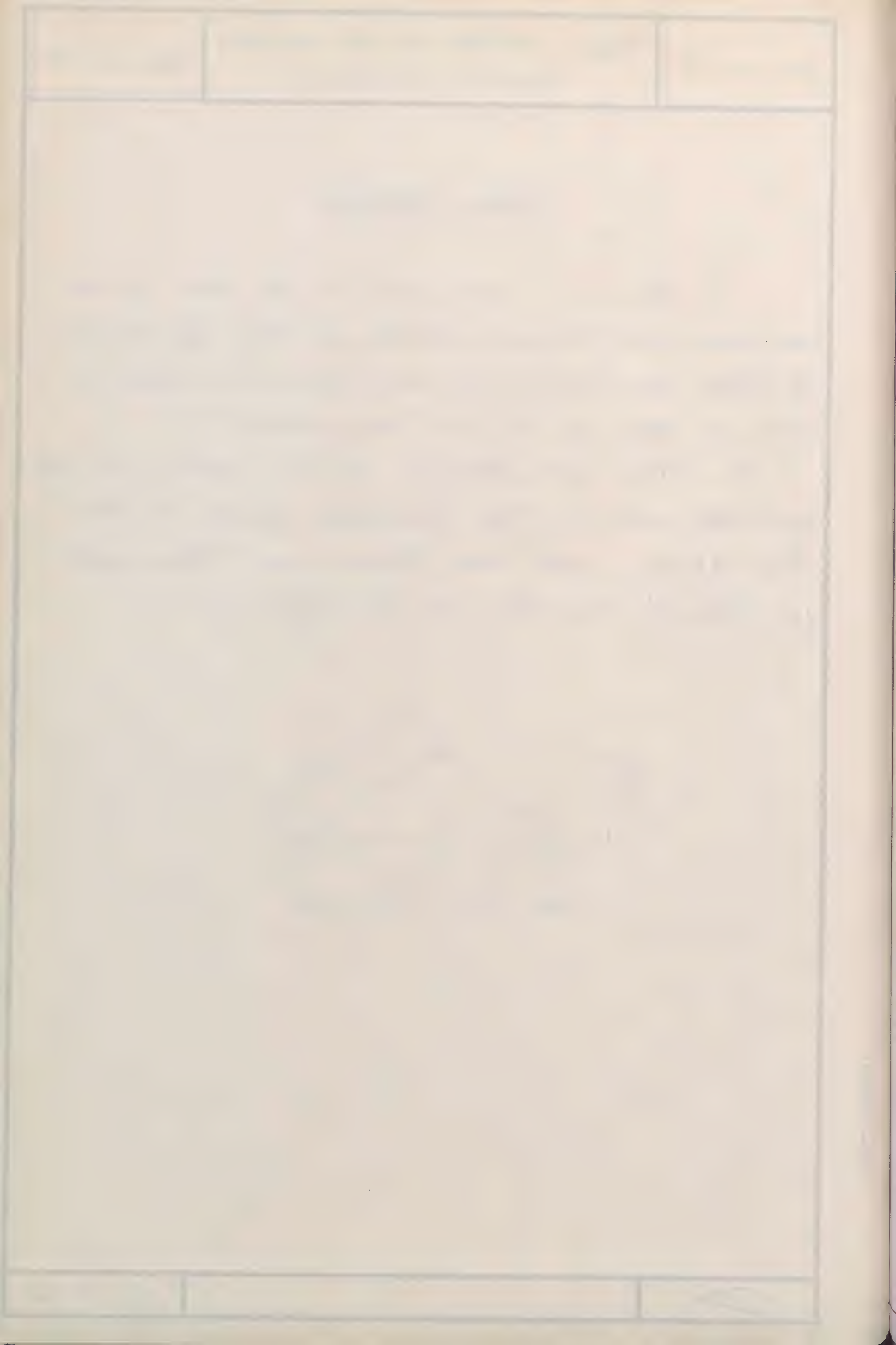
$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + (10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) - \sqrt{8(5+\sqrt{5})}\right](a_{20})^3 =$$

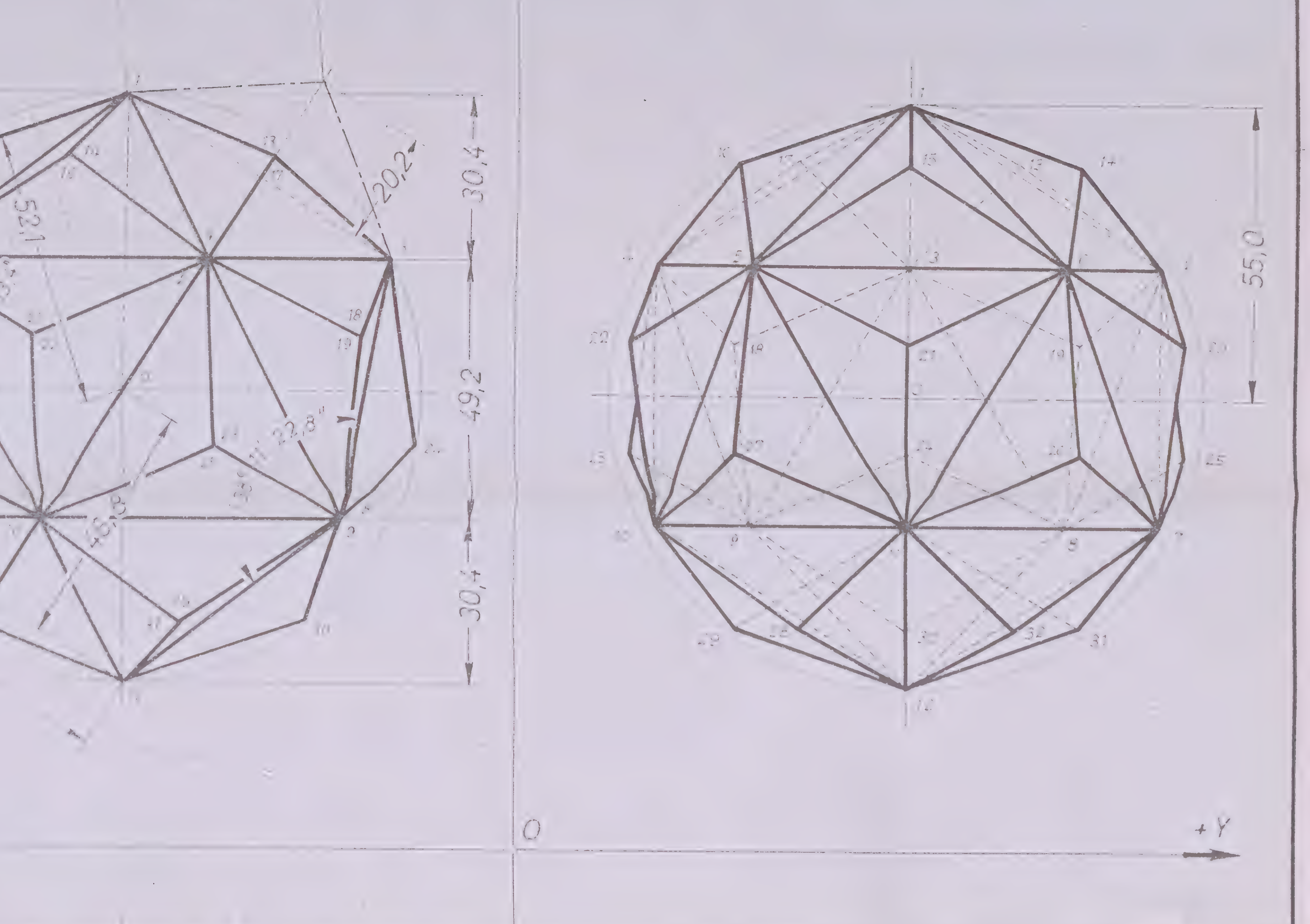
$$= \boxed{\frac{10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}}{3}(a_{20})^3}$$



En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados anteriores:

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l_{20}	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\ a_{20}$	$1,05\ 14\ 62\ldots a_{20}$
b_1	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ a_{20}$	$0,85\ 06\ 51\ldots a_{20}$
b_2	$\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2}\ a_{20}$	$0,94\ 72\ 74\ldots a_{20}$
c_{20}	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\ a_{20}$	$0,79\ 46\ 55\ldots a_{20}$
C_1	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \left[\sqrt{6(5-\sqrt{5})}+2\sqrt{5}\right] : 2\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{5})+2\sqrt{5}}{2}\right)^2}\ a_{20}$ $\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2} \times \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] : \left[4\times\left(\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]}\ a_{20}$	$0,82\ 82\ 64\ldots a_{20}$
d_{20}	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\ a_{20}$	$0,60\ 70\ 62\ldots a_{20}$
k_{20}	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}\ a_{20}$	$0,30\ 35\ 31\ldots a_{20}$
$2\varphi_{20}$	$\operatorname{sen}\varphi_{20} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$ $\quad \varphi_{20} = 69^\circ\ 5'\ 41,4''$	$\operatorname{sen}\varphi_{20} = 0,93\ 41\ 72\ldots$ $2\varphi_{20} = 138^\circ\ 11'\ 22,8''$
$2\alpha_{20}$	$\operatorname{tg}\alpha_{20} = -\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})}+2\sqrt{5}}{2}$ $\quad \alpha_{20} = 103^\circ\ 10'\ 26,7''$	$\operatorname{tg}\alpha_{20} = -4,27\ 22\ 16\ldots$ $2\alpha_{20} = 206^\circ\ 20'\ 53,4''$
$2\gamma_{20}$	$\operatorname{sen}\gamma_{20} = \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] : \left[4\times\left(\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]}$	$\operatorname{sen}\gamma_{20} = 0,87\ 43\ 66\ldots$ $2\gamma_{20} = 121^\circ\ 56'\ 24,0''$
β_{20}	$\operatorname{sen}\beta_{20} = \left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) : \sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}$	$\operatorname{sen}\beta_{20} = 0,56\ 03\ 39\ldots$ $\beta_{20} = 69^\circ\ 5'\ 41,4''$
p	$\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{20}$	$0,38\ 64\ 68\ldots a_{20}$
q	$\sqrt{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{20}$	$0,64\ 08\ 52\ldots a_{20}$
t	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\ a_{20}$	$1,05\ 14\ 62\ldots a_{20}$
S	$30\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ (a_{20})^2$	$11,55\ 97\ 77\ldots (a_{20})^2$
V	$\frac{10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}{3}\ (a_{20})^3$	$3,19\ 15\ 14\ldots (a_{20})^3$





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un icosaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de cada cara.

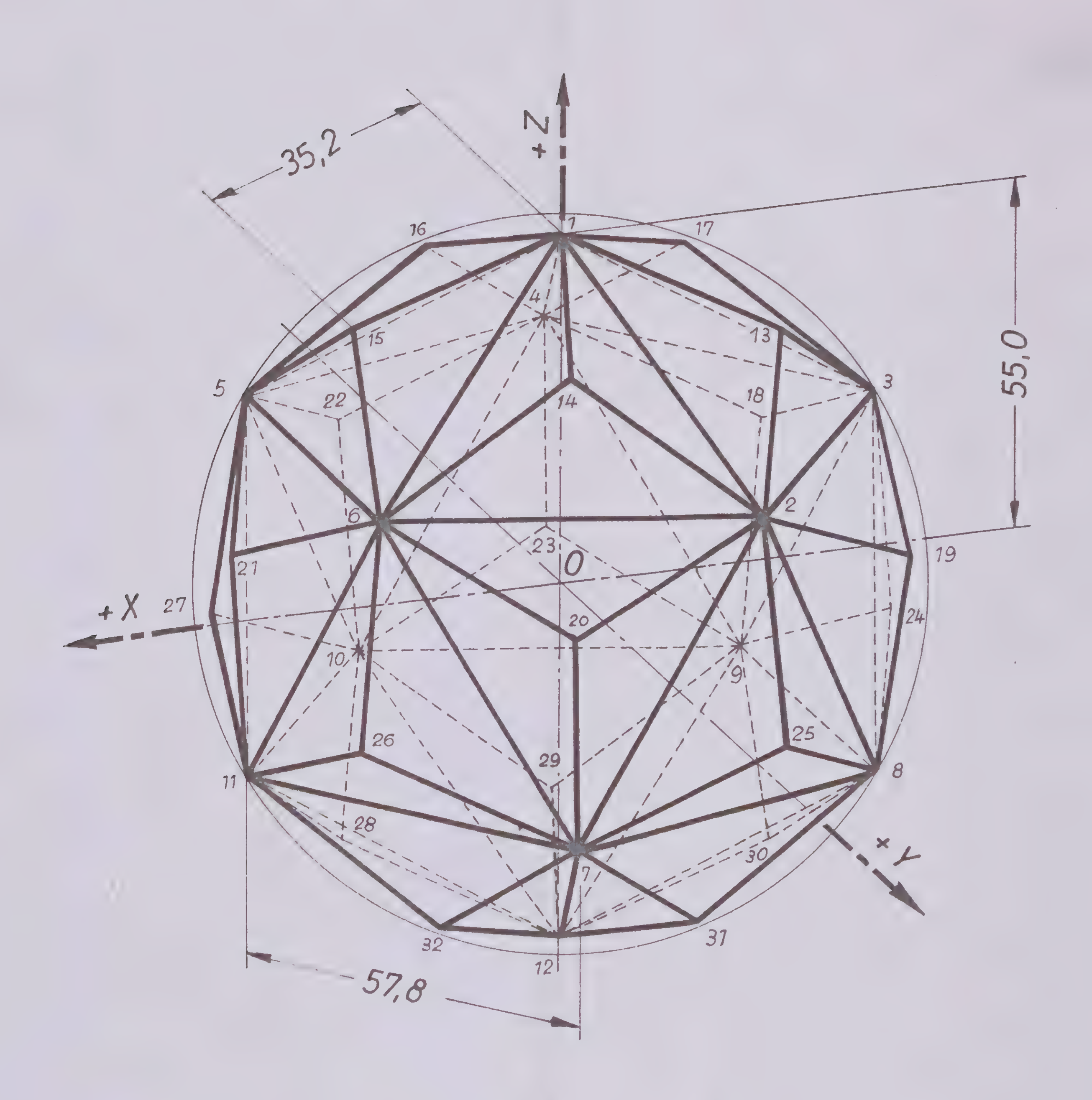
Las coordenadas del centro de la esfera, son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma, de 55 mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Icosaedro regular................ 1 al 12
Proyecciones centros caras del mismo
(vértices del dodecaedro conjugado)... 13 al 32

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1 : 1	Poliedro derivado del icosaedro regular					Lámina 29 — Curso 19 - 19



Poliedro derivado del icosaedro regular

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un tetraedro regular y de su tetraedro conjugado por sus aristas, cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

El radio de la esfera circunscrita al tetraedro dado, es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS

O (72, 72, 85) mm

a_4 = 55 mm.



TETRAEDRO – TETRAEDRO

CONSIDERACIONES PREVIAS

En las láminas 11 a 18 hemos estudiado los poliedros regulares convexos conjugados obtenidos al trazar por los puntos medios de las aristas de un poliedro regular dado, rectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas y el centro de aquél.

En la lámina 11ª obtuvimos el conjugado del tetraedro regular convexo, que es otro tetraedro.

En la 13ª el del exaedro, que es un octaedro.

En la 14ª el del octaedro, que es un exaedro.

En la 16ª el del dodecaedro, que es un icosaedro, y

En la 17ª el del icosaedro, que es un dodecaedro.

Por otra parte, hemos representado los sólidos comunes que se forman por la intersección de dos poliedros conjugados.

En la 12ª de tetraedro y tetraedro

En la 15ª de exaedro y octaedro, y

En la 18ª de dodecaedro e icosaedro

En la representación de estas tres últimas láminas, podemos observar que cada dos aristas correspondientes de ambos poliedros conjugados, son coplana-



rias y se cortan perpendicularmente en sus puntos medios; por consiguiente al unir sucesivamente los extremos de dichas aristas obtenemos un cuadrilátero plano, cuyas diagonales son las mencionadas aristas (una de cada poliedro) y que tendrá sus lados iguales, por lo que será o un rombo si las dos aristas son desiguales, o un cuadrado si son iguales.

En ambos casos, y repitiendo esta operación en todas las aristas correspondientes, obtendremos un poliedro de caras cuadradas o rómbicas, todas iguales.

Estos son los que vamos a estudiar seguidamente.

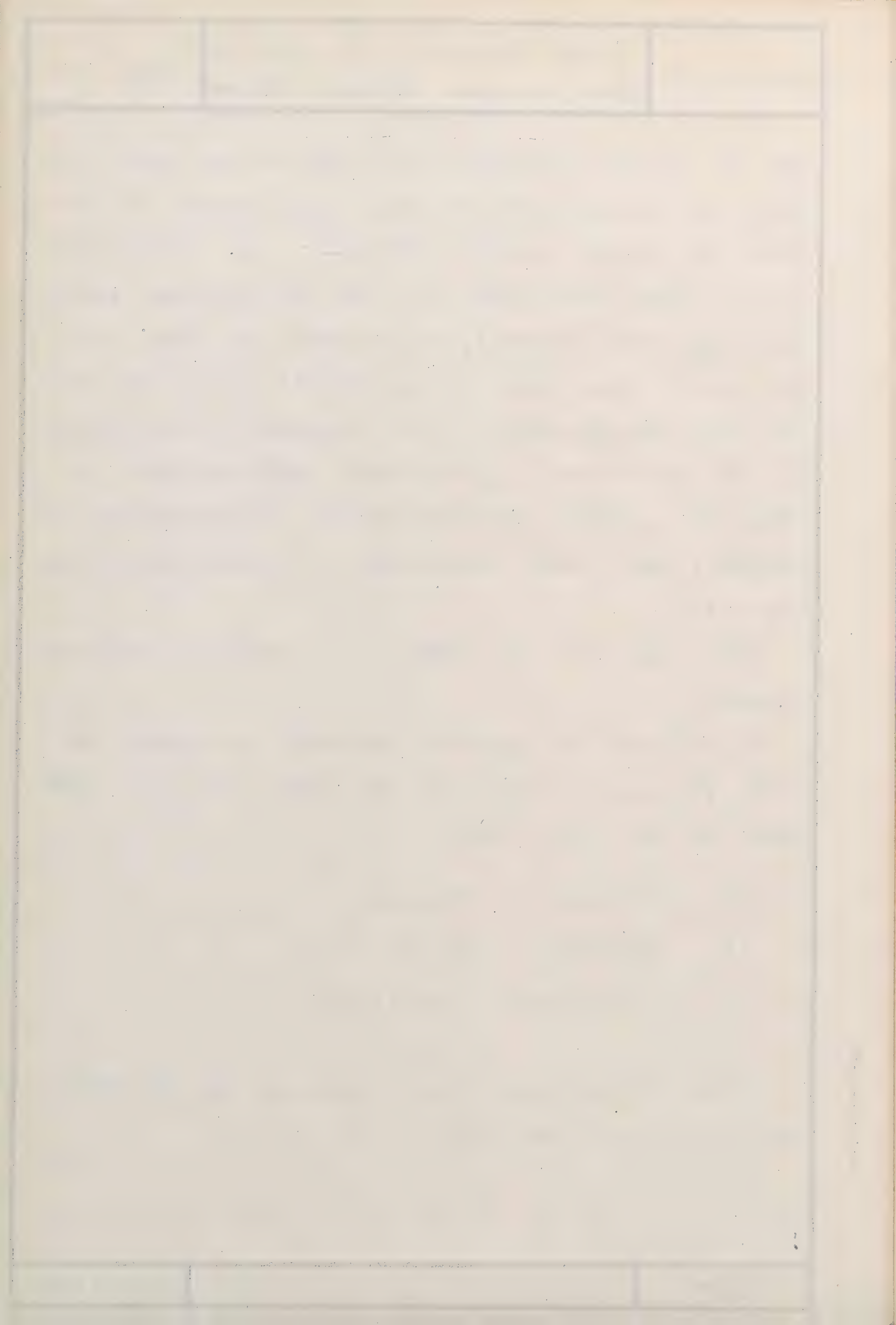
El número de poliedros diferentes, generados de esta forma, será de tres solamente y se obtendrán de los conjugados

a) Tetraedro - tetraedro

b) Exaedro - octaedro

c) Dodecaedro - icosaedro.

Pasemos a estudiar, como ejercicio de esta lámina, el primer caso a).



PROCESO GRÁFICO

El trazado gráfico del poliedro buscado, consiste en determinar previamente los vértices del tetraedro dado, y seguidamente los de su conjugado.

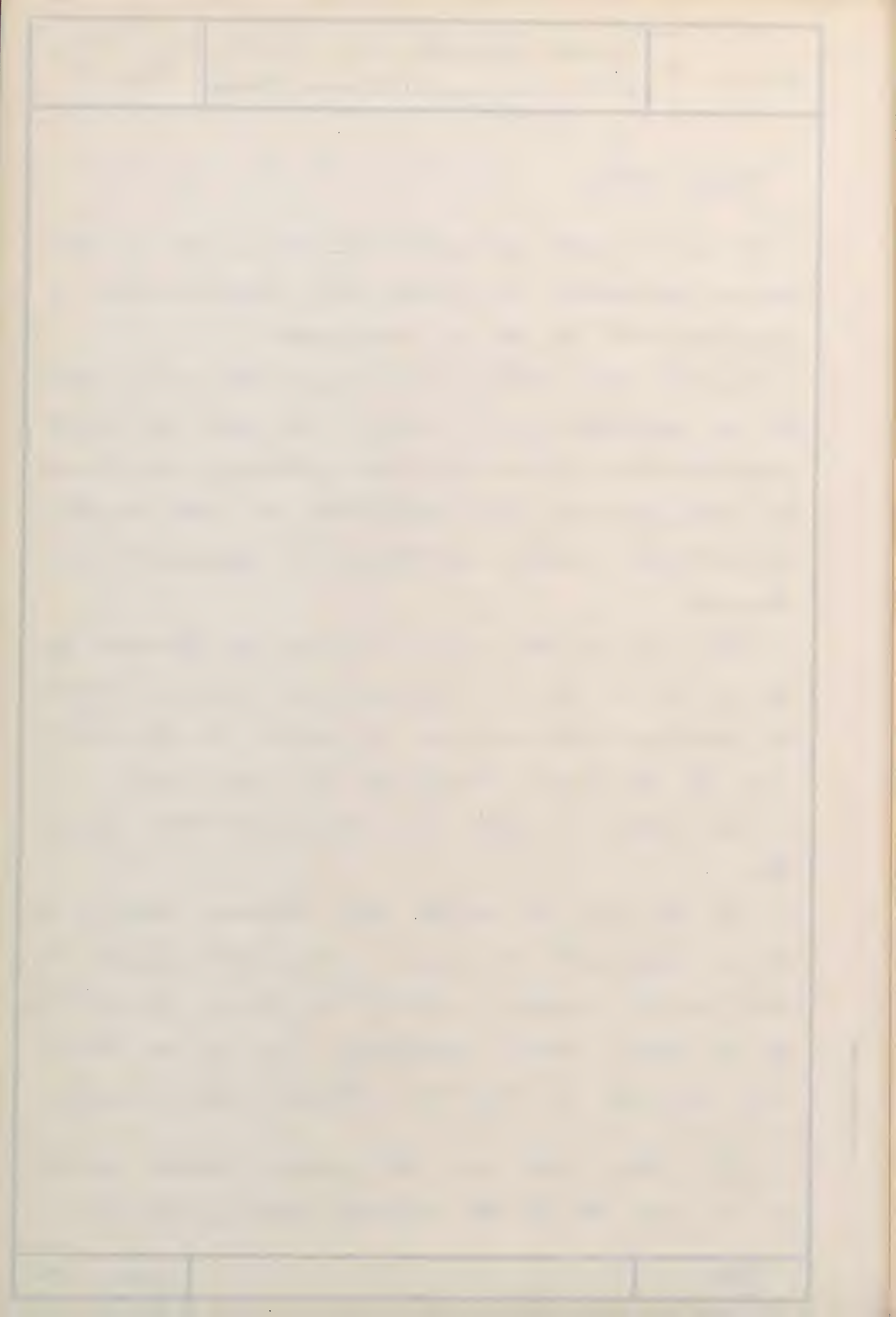
A continuación bastará unir consecutivamente, formando un cuadrilátero, los extremos de cada dos aristas perpendiculares (una de cada poliedro); estudiando en cada proyección la visibilidad de cada arista del poliedro pedido, se obtendrá la representación buscada.

Para el trazado de los vértices del tetraedro dado y de los de su conjugado, se seguirá el proceso análogo estudiado en el ejercicio de la lámina 11, por lo que omitimos su repetición.

El poliedro buscado tiene las propiedades siguientes:

1.º Por ser las aristas del tetraedro dado y las de su conjugado, de igual magnitud (ambos inscritos en la misma esfera), la figura geométrica de sus caras serán cuadrados (por ser sus diagonales iguales y perpendiculares), y todas iguales.

2.º Como cada cara del poliedro buscado contiene a una arista del poliedro dado. (y también



otra de su conjugado), el número de caras del mismo será igual al número de aristas del tetraedro; por consiguiente tendrá 6 caras

3° El número de sus vértices será pues la suma de los del tetraedro dado y los de su conjugado, teniendo por consiguiente 4 + 4 = 8 vértices

4° Como cada cara tiene 4 lados iguales, el número de aristas del poliedro buscado será $\frac{1}{2}(4 \times 6) =$ = 12 aristas, siendo 6 el número de caras; todas las aristas serán iguales.

5° El poliedro pedido será convexo, ya que queda en un mismo semiplano al prolongar el plano de cualquier cara de aquél.

Las propiedades anteriores definen al poliedro pedido por las condiciones

$$\left.\begin{array}{l} C = 6 \\ V = 8 \\ A = 12 \\ \text{Caras cuadradas} \end{array}\right\}$$

que son las que cumplen únicamente el Exaedro regular.

Por consiguiente, el poliedro buscado es un cubo inscrito en la misma esfera dada.

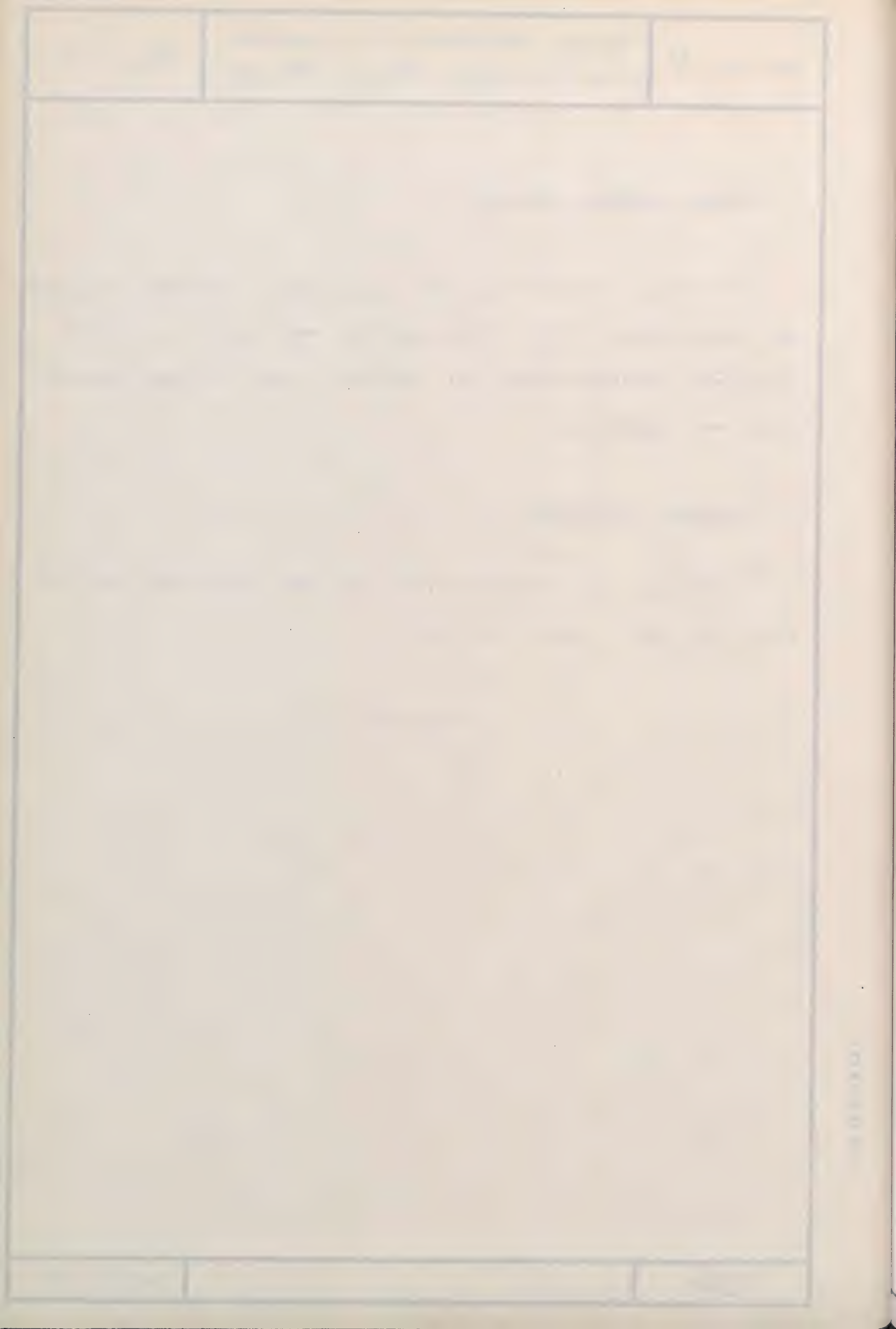


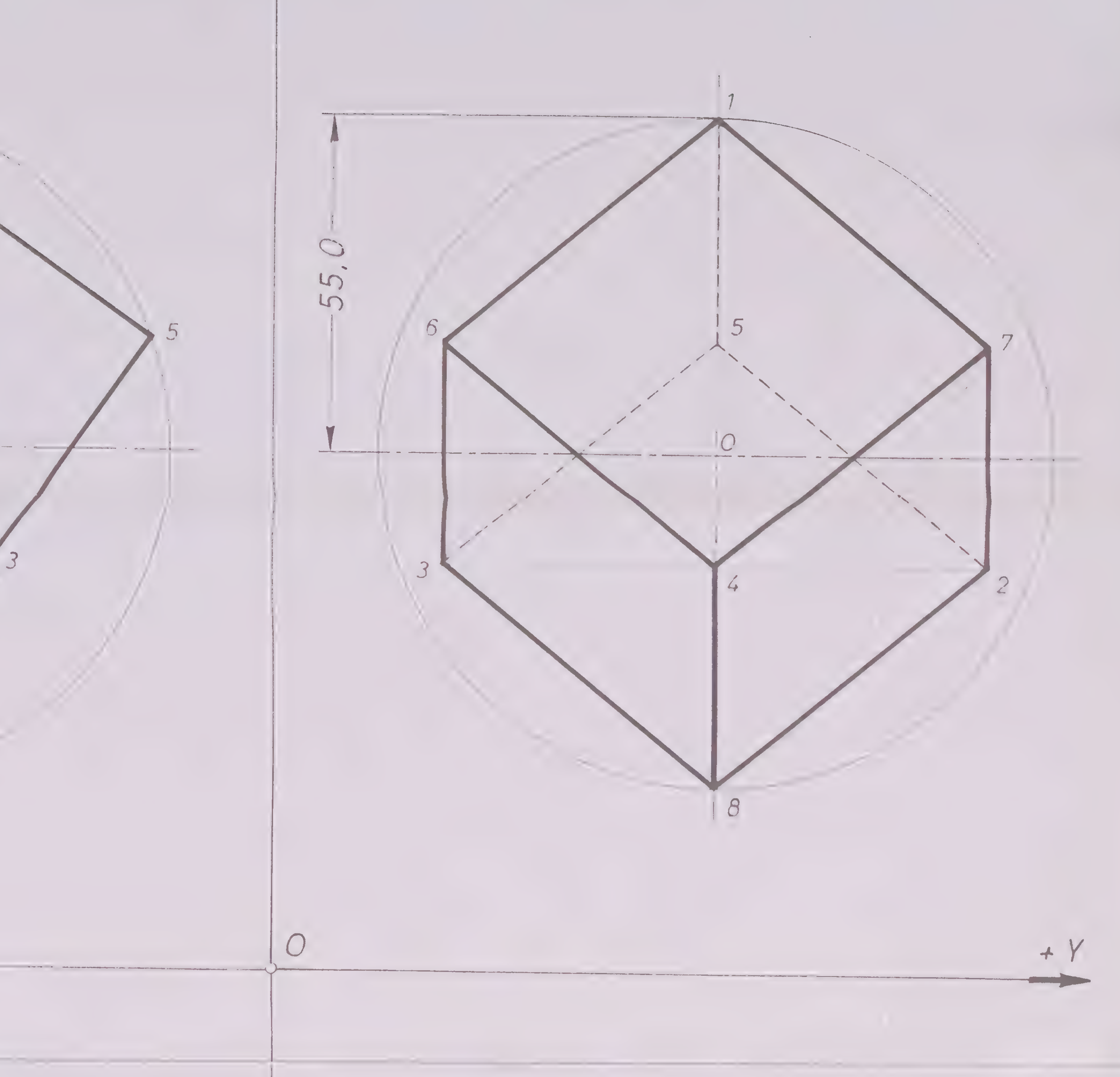
PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas, es igual al desarrollado en la lámina 25, cuyo proceso y cuadro sinóptico correspondiente es idéntico y por lo cual omitimos su repetición.

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de seis cuadrados de 63,5 mm. de lado (ver lám. 2).





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un tetraedro regular y de su tetraedro conjugado por sus aristas cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambas.

El radio de la esfera circunscrita al tetraedro dado; es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

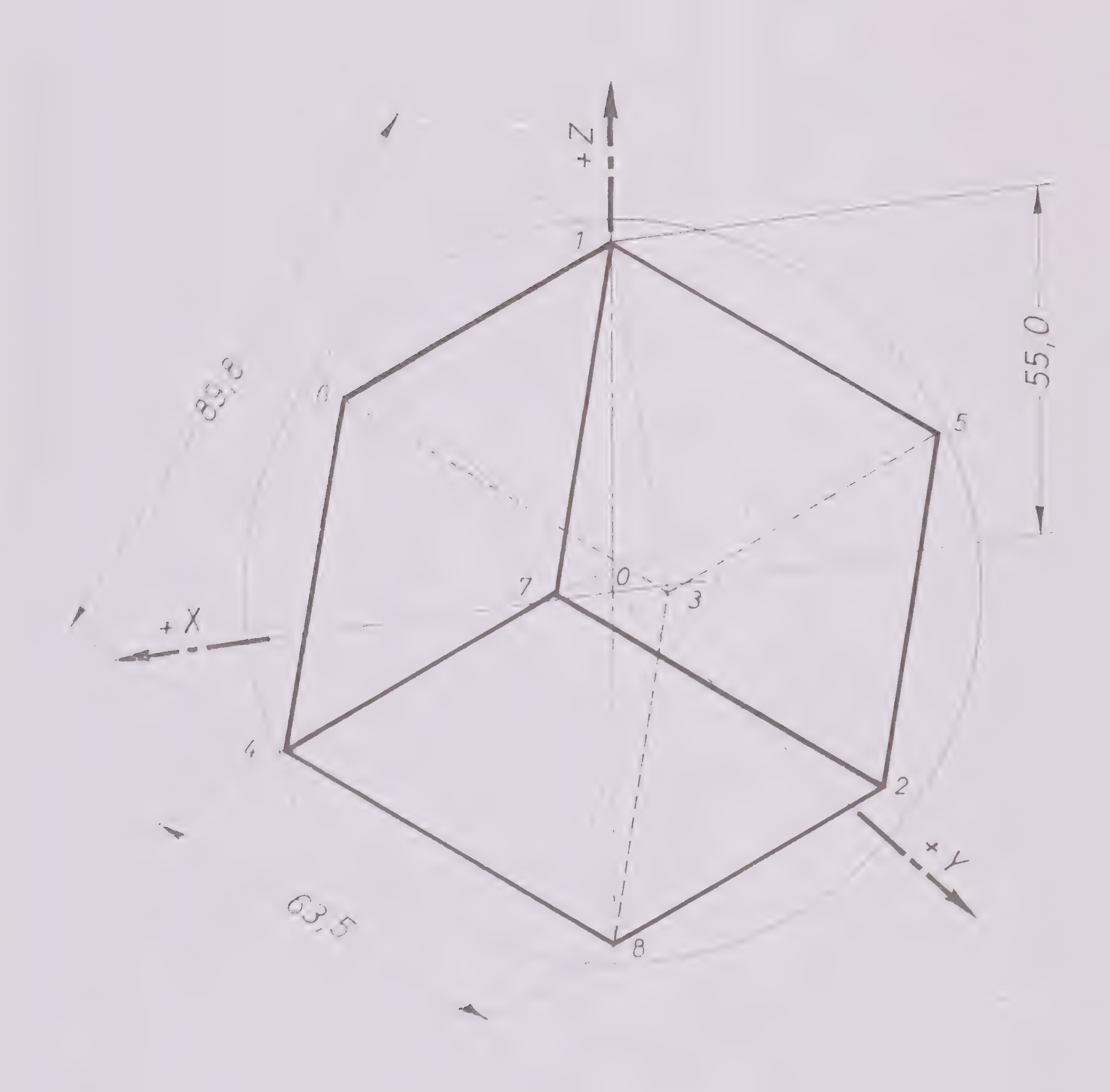
NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dado (rojo)________ 1 al 4

Tetraedro conjugado (azul)___ 5 al 8

Poliedro derivado (negro)_____ 1 al 8

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Derivado de los conjugados tetraedro-tetraedro					Lámina 30 Curso 19 -19



Derivado de los conjugados tetraedro-tetraedro

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un exaedro regular y de su octaedro conjugado por sus aristas, cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

El radio de la esfera circunscrita al octaedro dado (de mayor radio), es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 73, 85) mm

a_8 = 55 mm

UNE A4 210 X 297



EXAEDRO- OCTAEDRO

CONSIDERACIONES PREVIAS

En las láminas 13 y 14 hemos estudiado los poliedros conjugados del exaedro y octaedro regulares, obtenidos al trazar por los puntos medios de las aristas del poliedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas y el centro de aquél.

En la lámina 15 hemos representado el poliedro obtenido por la intersección de ambos conjugados.

En la presente lámina 31 vamos a estudiar el poliedro derivado de ambos conjugados cuando se unen sucesivamente los extremos de cada dos aristas correspondientes con lo cual obtendremos rombos todos iguales, que serán las caras del poliedro pedido.

Previamente al estudio de su trazado, vamos a deducir las propiedades geométricas del poliedro derivado.

1º Todas sus caras son iguales y tienen la forma de rombos.

En efecto, en los trazados gráficos de las láminas 13 a 15 puede observarse que las aristas del octaedro son mayores que las del exaedro. Esto puede comprobarse analíticamente mediante la fórmula 11, lám. 2 y fórmula 21, lám. 3, siguientes:

$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l_6$ y $a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8$, en las que



despejando l_6 y l_8, tendremos

$$l_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 \quad \text{y} \quad l_8 = \frac{2}{\sqrt{2}} a_8 = \sqrt{2}\, a_8$$

en las que haciendo $a_6 = a_8$, y siendo

$$\sqrt{2} > \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

se verificará que a igualdad de radios de sus esferas circunscritas, será

$$l_8 > l_6$$

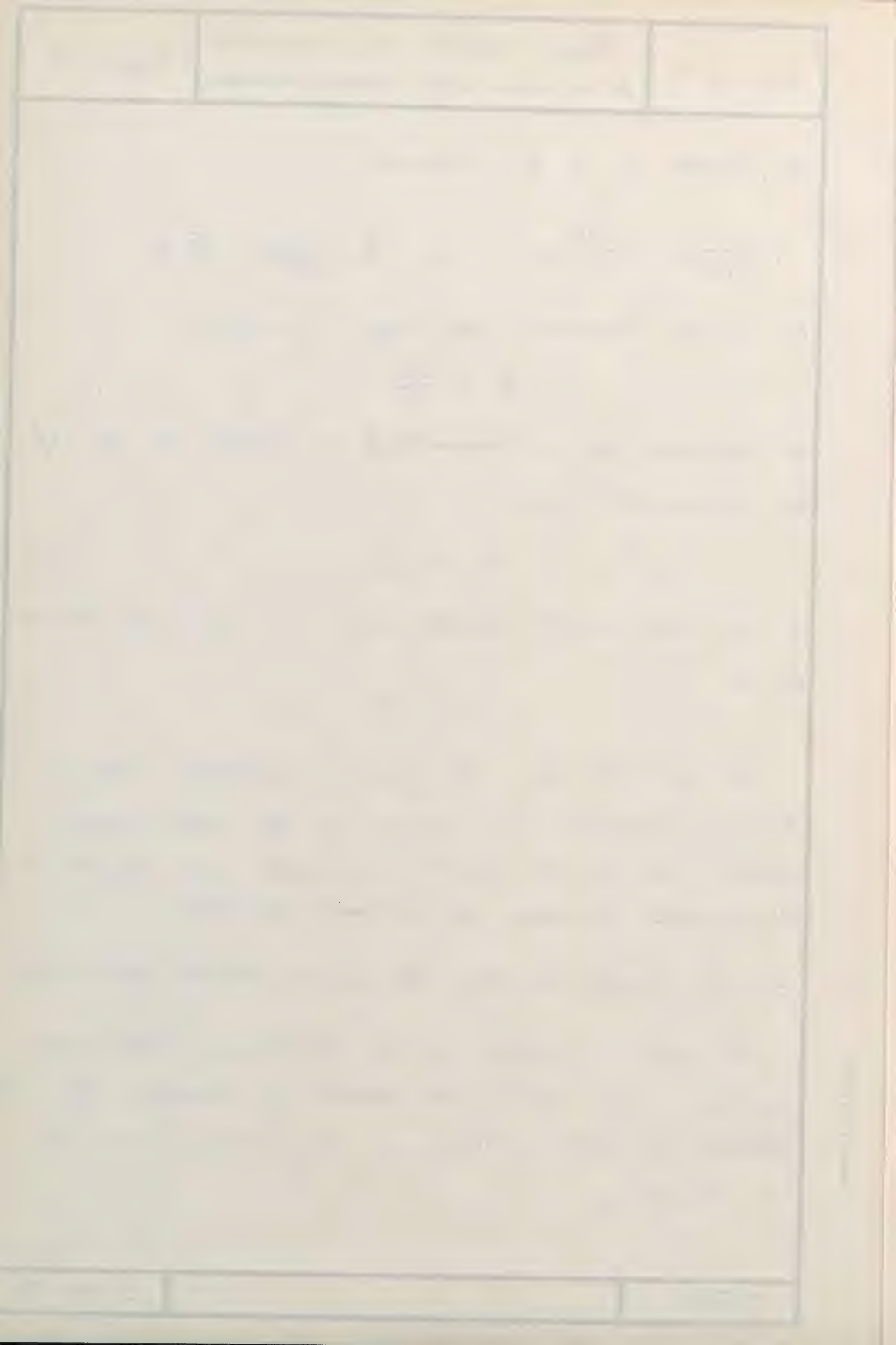
y con mayor motivo, cuando como en el caso que nos ocupa, es

$$a_8 > a_6$$

Así pues al ser $l_8 > l_6$, el cuadrilátero obtenido al unir sucesivamente los extremos de dos aristas correspondientes en los dos poliedros conjugados, son rombos, todos iguales y caras del poliedro derivado

2º El número de caras del poliedro derivado, será de 12

En efecto, en virtud de su generación, cada cara contiene una arista del exaedro y también otra del octaedro; en ambos poliedros es de 12 el número de sus aristas.



3ª El número de vértices del poliedro derivado es de 14

Este número será el de la suma de los vértices del exaedro (8) y del octaedro (6), generadores del poliedro.

4ª El poliedro derivado es convexo

Pues al prolongar el plano de cualquiera de sus caras, queda todo él en el mismo semiespacio.

5ª El número de aristas será de 24

Por ser convexo, se verificará la relación de Euler en la que

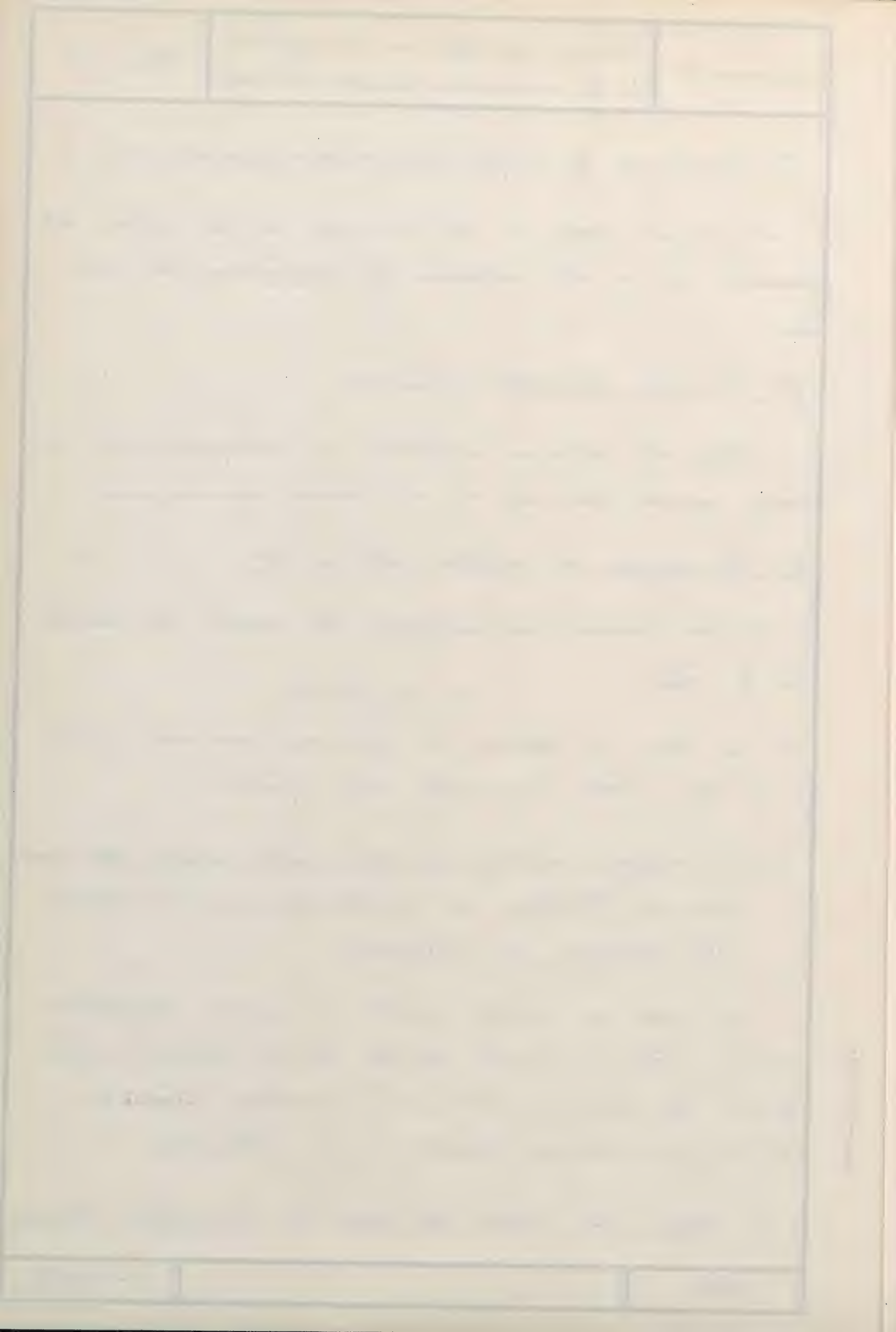
$$C + V = A + 2$$

de la que se deduce A, ya que conocemos C = 12 y V = 14. Todas las aristas son iguales.

6ª Los ángulos sólidos formados en los vértices del exaedro son triedros, y los formados en los vértices del octaedro, son tetraedros.

ya que en dichos vértices concurren respectivamente tres o cuatro aristas de los poliedros conjugados. Así pues existirán en el poliedro derivado 8 ángulos sólidos triedros y 6 tetraedros.

7ª Existe una esfera que pasa por los vértices tetraedros



la circunscrita al octaedro dado.

8º Existe una esfera, concéntrica con la anterior y distinta de ésta, que pasa por los vértices triedros.

La circunscrita al exaedro conjugado y de menor radio que la anterior.

9º Existe una esfera, concéntrica con las anteriores, tangente a las aristas, no en su punto medio.

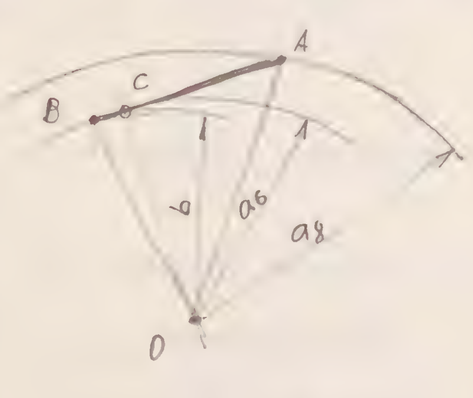


Figura 1

Si consideramos una arista cualquiera $\overline{A\text{-}B}$, (fig. 1), cuyo extremo $\overline{A}$ pertenezca a un vértice del octaedro y el B a otro del exaedro, y unimos estos extremos con el centro O de ambos poliedros conjugados, el plano OAB será diametral, y el triángulo OAB tiene OA > OB por ser $\overline{OA}$ el radio $\widehat{a}_8$ de la esfera circunscrita al octaedro y $\overline{OB}$ el radio $\widehat{a}_6$ de la del exaedro y ya hemos visto en la propiedad 1ª que $a_8 > a_6$. Así pues, la altura $\overline{OC}$ de este triángulo (constante para todas las aristas), será el radio "$\widehat{b}$" de la esfera tangente a dichas aristas y el pie C de dicha altura no equidistará de A y B.

10º Existe una esfera, concéntrica con las anteriores,



tangente a todas las caras del poliedro derivado, en el centro del rombo (esfera inscrita).

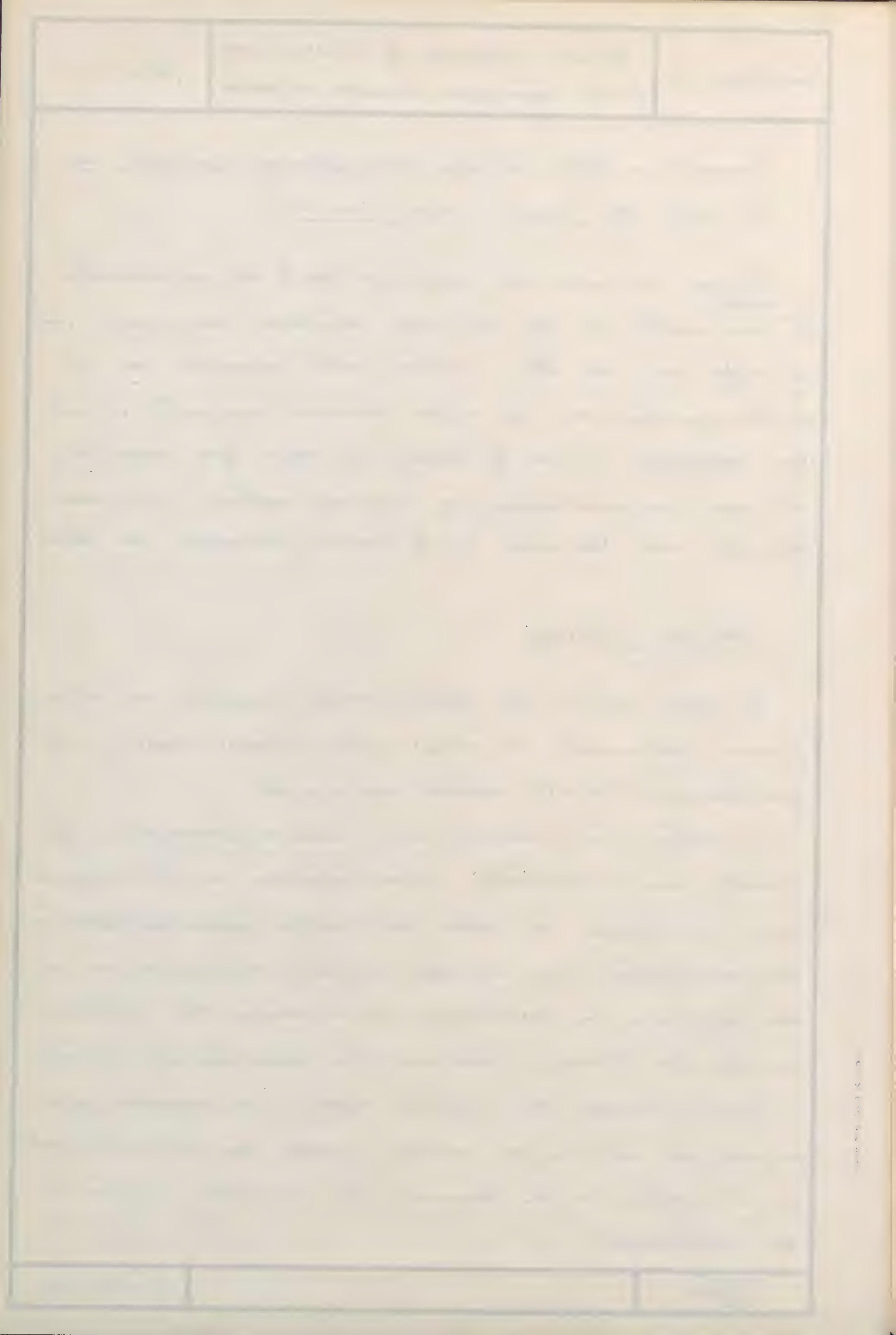
Por ser el centro del rombo el punto de intersección y medio de dos aristas de los poliedros regulares conjugados (una de cada uno de ellos), dicho punto coincide con el de tangencia de la esfera común tangente a ambos poliedros, y por lo tanto, el radio que pasa por él será perpendicular a ambas aristas; por consiguiente será tangente a la cara formada por ellas.

PROCESO GRÁFICO

El trazado gráfico del poliedro pedido, consiste en determinar previamente los vértices del octaedro dado, y seguidamente los del exaedro conjugado.

A continuación bastará unir consecutivamente, formando un cuadrilátero (paralelogramo en las proyecciones), los extremos de cada dos aristas perpendiculares correspondientes (una de cada poliedro); estudiando en cada proyección la visibilidad de las aristas del poliedro buscado, se obtendrá fácilmente la representación de éste.

Para el trazado del octaedro dado, y del exaedro conjugado, se seguirá el mismo proceso que el estudiado en el ejercicio de la lámina 15, por lo que omitimos su repetición.



PROCESO GRAFICO-ANALÍTICO

Para simplificar y dar más exactitud al trazado, es muy útil el empleo de cotas calculadas previamente en forma analítica.

En este ejercicio consideraremos las siguientes magnitudes del poliedro derivado:

l = Arista del poliedro

a_1 = Radio de la esfera que pasa por los vértices tetraédricos (los del octaedro dado).

a_2 = Radio de la esfera que pasa por los vértices triedros (los del exaedro conjugado)

b = Radio de la esfera tangente a las aristas

c = Radio de la esfera tangente a las caras

l_8 = Arista del octaedro dado

l_6 = Arista del cubo conjugado.

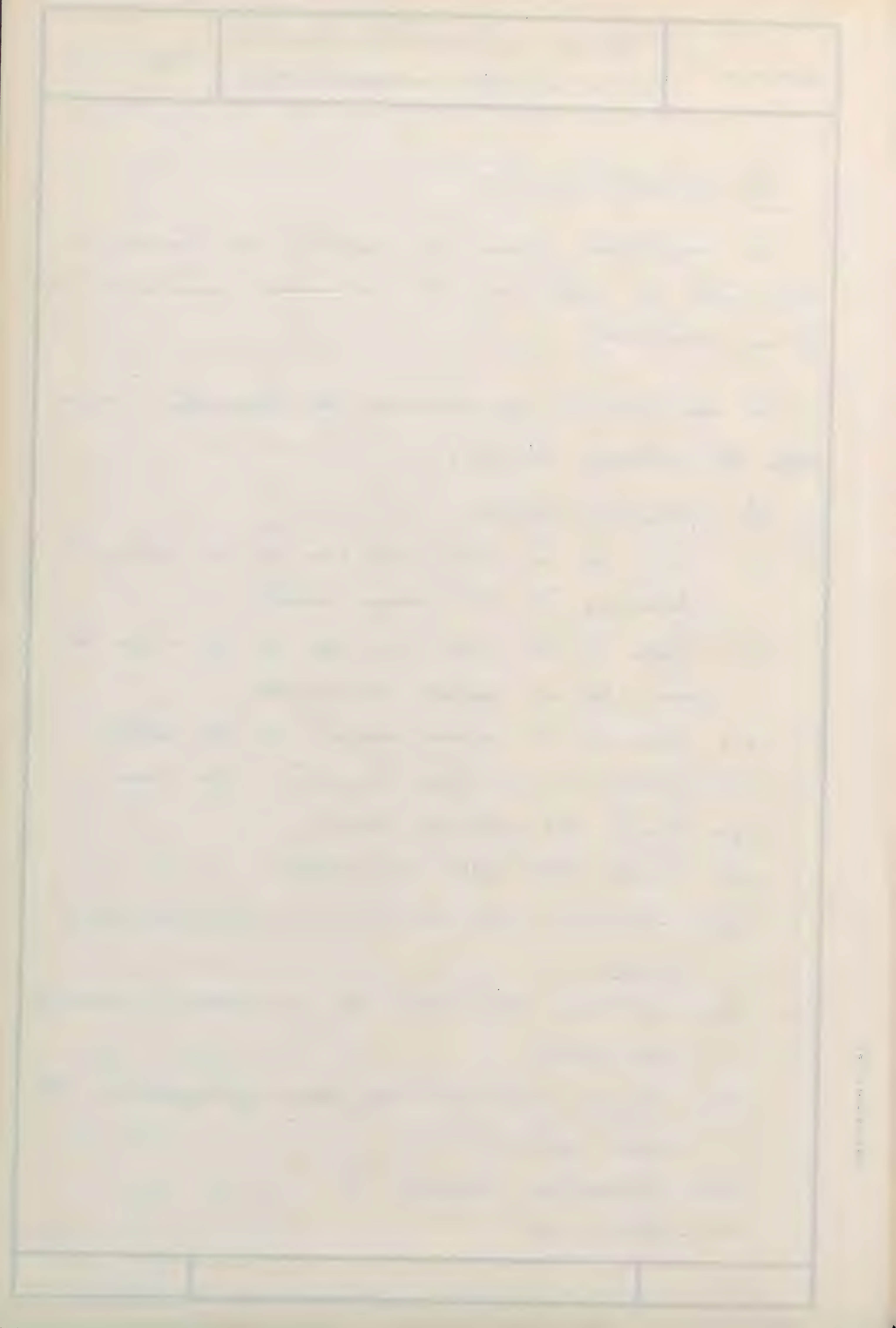
l_{II} = Distancia entre los centros de dos caras contiguas.

p = Distancia del centro de una cara a uno de sus lados

2φ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

S = Superficie lateral

V = Volumen



Todas las magnitudes anteriores las calcularemos en función de a_1, radio de la esfera circunscrita al octaedro regular dado.

a_1 = Radio de las esfera que pasa por los vértices tetraédricos.

Dato del ejercicio

l_8 = Arista del octaedro dado

De la fórmula 137, lám. 13, se obtiene que

$$a_1 = a'_8 = l_6 \qquad \text{y de la fórm. 136, que}$$

$$l'_8 = \boxed{l_8} = \sqrt{2}\; l_6 = \boxed{\sqrt{2}\; a_1}$$

l_6 = Arista del cubo conjugado

Por el cálculo anterior vemos también que

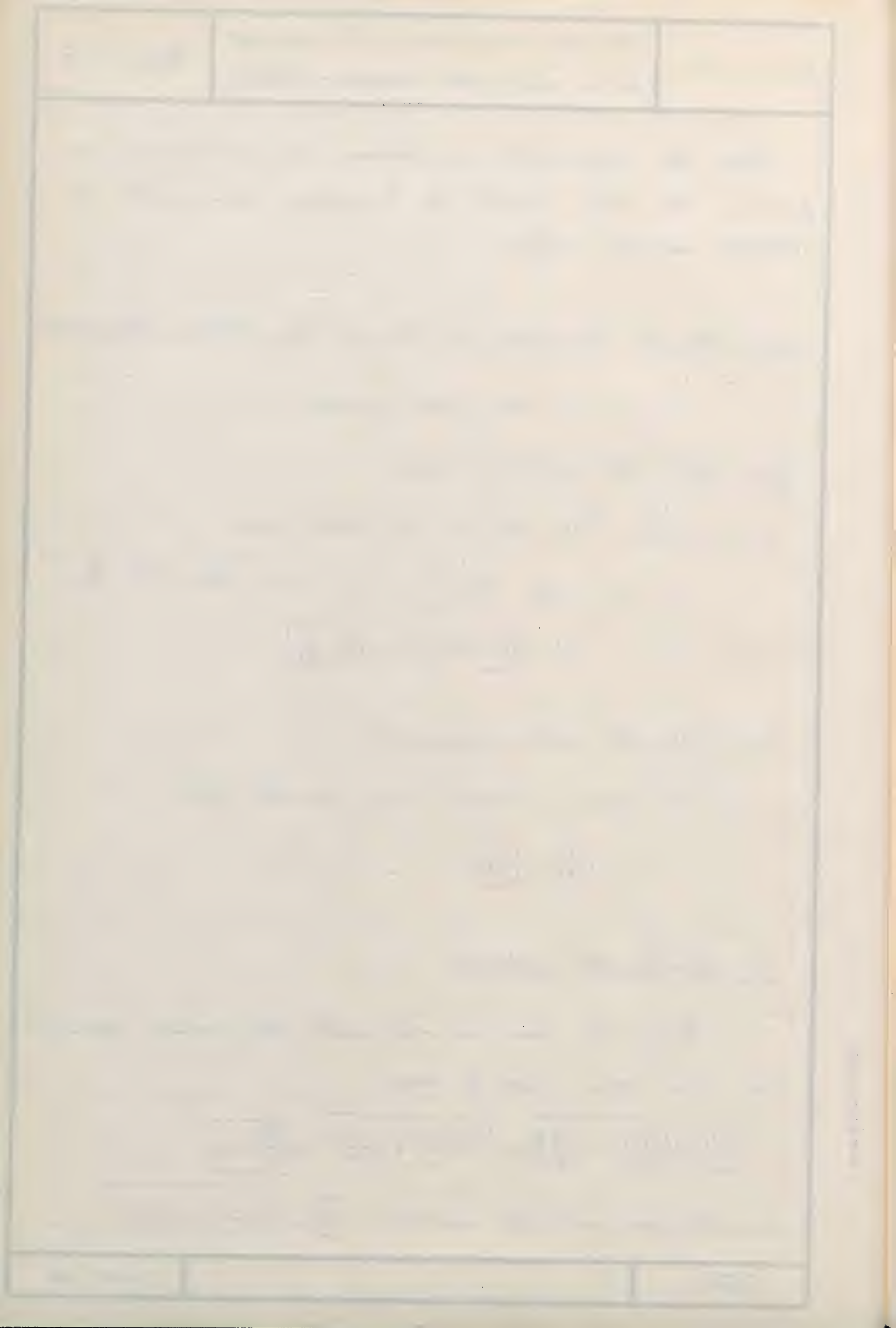
$$\boxed{l_6} = \boxed{a_1}$$

l = Arista del poliedro

l_8 y l_6 son las diagonales del rombo que forma una cara, por lo que

$$\boxed{l} = \sqrt{\left(\frac{l_8}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_6}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\, a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\, a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} =$



$$= \sqrt{\frac{2}{4}(a_1)^2 + \frac{1}{4}(a_1)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}\,(a_1) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\,a_1}$$

<u>p – Distancia del centro de una cara a uno de sus lados</u>

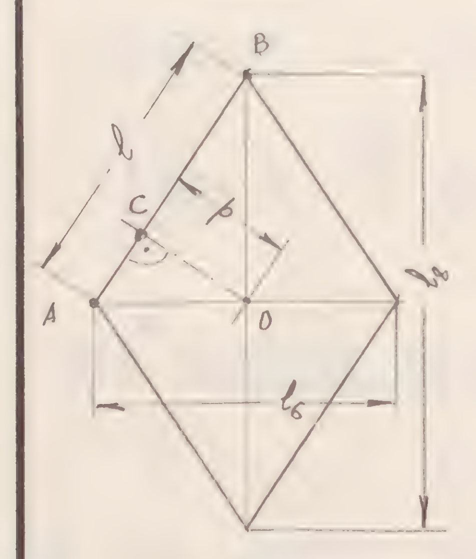


Figura 2

En la figura 2 hemos representado una cara del poliedro pedido (rombo de diagonales l_6 y l_8).

Tracemos por $\underline{O}$ la perpendicular al lado $\overline{AB}$, siendo $\underline{C}$ el pie de la misma.

Los triángulos rectángulos $\underline{A \cdot O \cdot B}$ y $\underline{A \cdot C \cdot O}$ son semejantes (ángulo $\widehat{C \cdot A \cdot O}$ común), por lo que

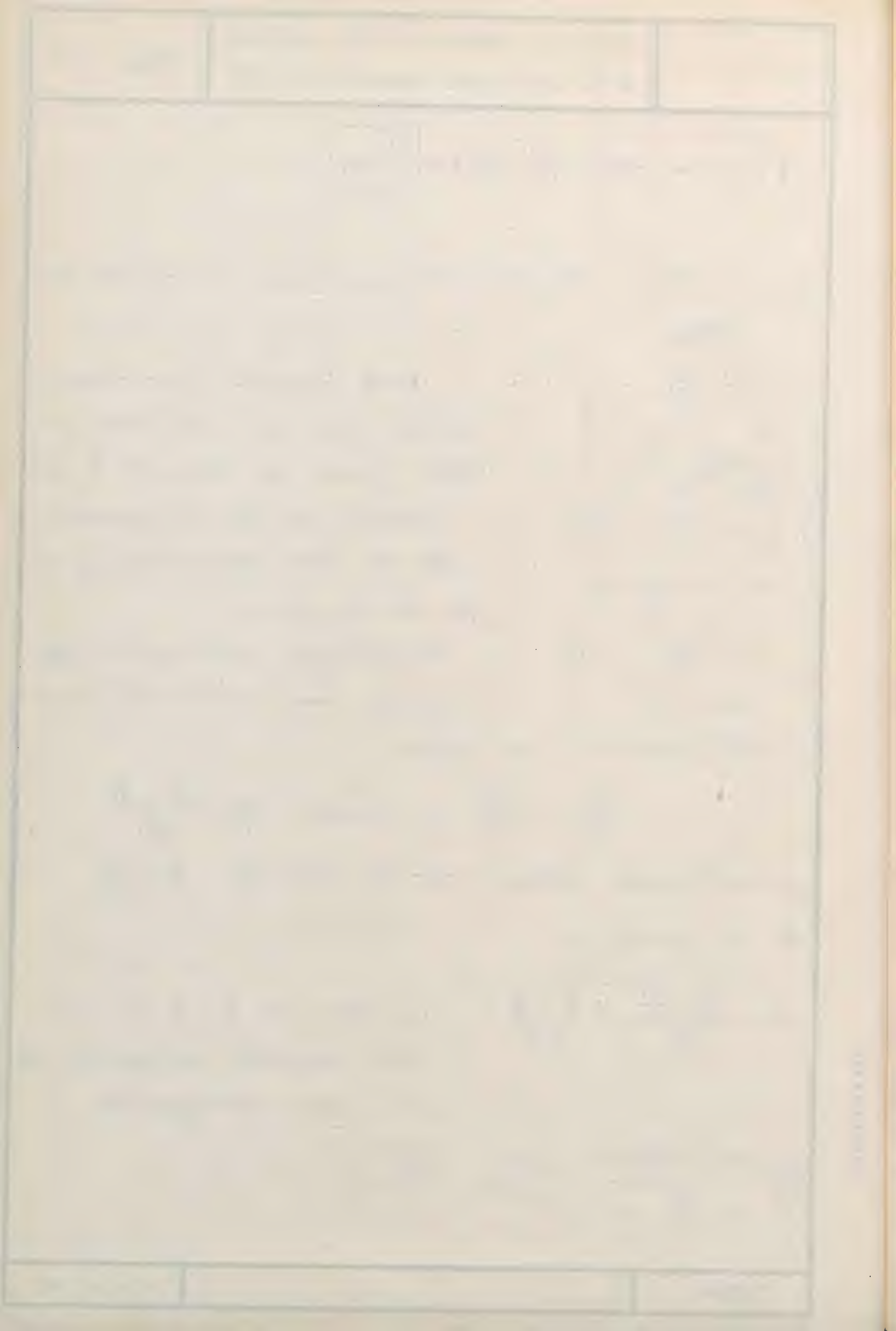
$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \quad \text{de donde} \quad \overline{OC} = \frac{\overline{AO} \times \overline{BO}}{\overline{AB}}$$

y sustituyendo valores $\overline{OC} = p$, $\overline{AO} = \frac{l_6}{2}$, $\overline{BO} = \frac{l_8}{2}$, $\overline{AB} = l$, tendremos

$$p = \frac{\frac{l_6}{2} \times \frac{l_8}{2}}{l} = \frac{l_6 \times l_8}{4\,l};$$

los valores de l_6, l_8, l, han sido calculados anteriormente, por lo que sustituyendo

$$\boxed{p} = \frac{a_1 \times \sqrt{2} \times a_1}{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a_1} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\,a_1 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}\,a_1}$$



a_2 = Radio de la esfera que pasa por los vértices triedros

Es el radio de la esfera circunscrita al cubo de lado l_6 dado, siendo el valor de éste, en función de a_1

$$l_6 = a_1$$

y teniendo en cuenta la fórm. 11, lám. 2, será

$$\boxed{a_2} = a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l_6 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\, a_1}$$

b =* Radio de la esfera tangente a las aristas

Si unimos los extremos C y B (fig. 3) de una arista del poliedro derivado, con el centro A de la esfera circunscrita, se nos formará un triángulo $\triangle CB$, de lados $\overline{CB} = l$; $\overline{AC} = a_2$ y $\overline{AB} = a_1$. La altura $\overline{AD}$ correspondiente al lado $\overline{CB}$, será el radio pedido.

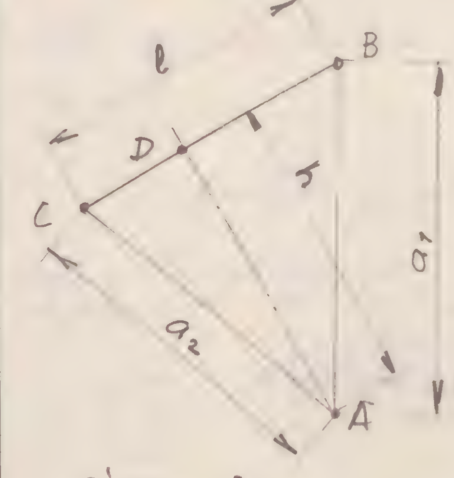


Figura 3

En Geometría se demuestra que el área F del triángulo ABC, tiene el valor

$$F = \frac{1}{2}\, a h = \sqrt{s\,(s-a)(s-b')(s-c)},$$ siendo $\underline{s}$ el semiperímetro, $\underline{a}$, $\underline{b'}$, $\underline{c}$ los lados del triángulo, y $\underline{h}$ la altura correspondiente al lado $\underline{a}$. De aquí se

UNE A4 210 X 297

NOTA.- El proceso de cálculo seguido en este estudio para la determinación del valor del radio b de la esfera tangente a las aristas, conduce con relativa facilidad a la obtención del resultado buscado.

Al tratar de aplicar este mismo proceso en el ejercicio análogo de la lámina 32 para los conjugados dodecaedro - icosaedro, tropezamos con la dificultad material de simplificar un complicado radical que tenía la siguiente expresión:

$$b = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} + 1\right)\frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} + 1\right)\frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + 1\right)\frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\right)\frac{a_1}{2}}}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\ a_1}$$

Después de varios intentos infructuosos, enfocamos de nuevo el problema bajo un punto de vista trigonométrico, que nos llevó rapidamente a su solución, obteniendo el valor de

$$b = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,a_1$$

Este valor será pues el resultado de la simplificación del complicado radical primitivo.

Si aplicamos el proceso seguido en la lámina 32, a este caso obtendremos el mismo resultado por un camino más corto que detallamos a continuación:

(sigue al dorso de la página 10)

deduce que

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b')(s-c)}}{a}$$

En el caso particular que nos ocupa, tendremos que

$$a = l = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1$$

$$b' = a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1$$

$$c = a_1$$

$$s = \frac{a+b'+c}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + a_1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} a_1$$

$$s-a = \frac{\sqrt{3}+1}{2} a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 = \frac{1}{2} a_1$$

$$s-b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 = \frac{1}{2} a_1$$

$$s-c = \frac{\sqrt{3}+1}{2} a_1 - a_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1\right) a_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} a_1$$

$$h = b$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula general, tendremos

$$\boxed{b} = \frac{2\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2} a_1 \times \frac{1}{2} a_1 \times \frac{1}{2} a_1 \times \frac{\sqrt{3}-1}{2} a_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2} a_1} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{b} = \frac{2\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2} a_1 \times \frac{1}{2} a_1 \times \frac{1}{2} a_1 \times \frac{\sqrt{3}-1}{2} a_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2} a_1} = \frac{2\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{4} \times \frac{1}{4} (a_1)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} a_1} =$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \qquad l = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1$$

$$\cos\alpha = \frac{(a_2)^2 + l^2 - (a_1)^2}{2\, a_2\, l} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a_1\right)^2 - (a_1)^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} a_1} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1}{\frac{2 \times 3}{4}} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} - 1\right) : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

y finalmente

$$\boxed{b} = a_2 \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} a_1}$$

Valor coincidente con el ya obtenido.

$$= \left[2\sqrt{\frac{2}{4} \times \frac{1}{4}} \; : \; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] a_1 = \left[\frac{2\sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{3}}{2} \right] a_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_1 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} a_1}$$

c = Radio de la esfera tangente a las caras

Es igual al radio de la esfera tangente a las aristas de uno de los dos poliedros conjugados dados.

Tomando como base el exaedro, su arista, determinada anteriormente en función de a_1, es de

$$l_6 = a_1$$

y el radio de la esfera tangente a las aristas de este cubo, valdrá (ver fórm. 12, lám. 2)

$$\boxed{c} = b_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} a_1}$$

Se obtendrá este mismo valor partiendo del octaedro, cuya arista

$$l_8 = \sqrt{2}\, a_1$$

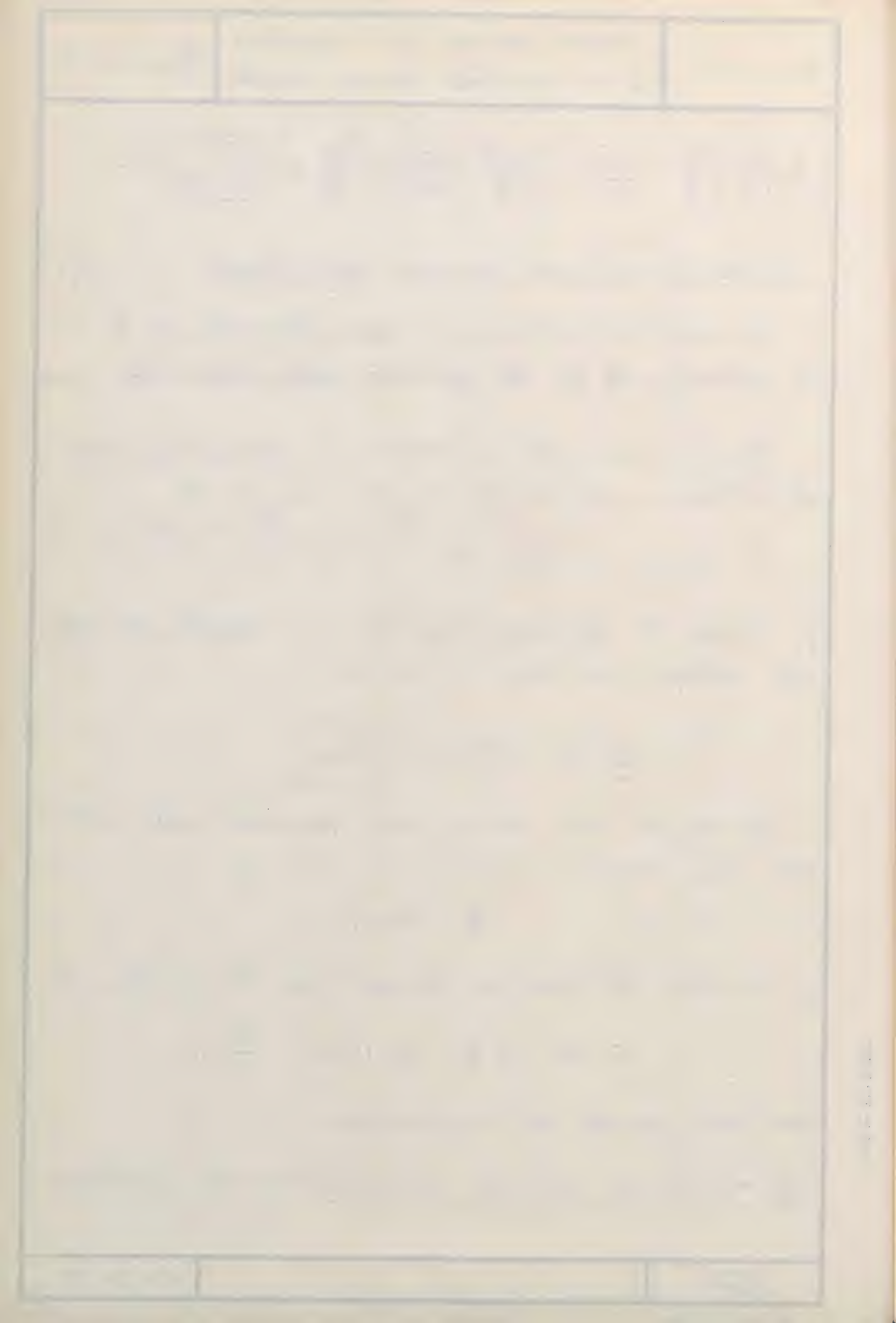
y el radio de la esfera tangente (ver fórm. 22, lám. 3)

$$c = b_8 = \frac{1}{2} l_8 = \frac{1}{2} \sqrt{2}\, a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_1$$

valor coincidente con el anterior.

l_{III} = Distancia entre los centros de dos caras contiguas

UNE A4 210 X 297



En el estudio que hicimos en la lámina 15 del poliedro obtenido por la intersección del exaedro y octaedro conjugados por sus aristas, vimos que el sólido común a ambos es un poliedro no regular, convexo, compuesto de 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros de lados de igual longitud.

Este poliedro es un caso particular de los más generales denominados "Poliedros arquimedianos" y lo hemos designado con el nombre de "Arquimediano III".

En la lámina 34 se ha efectuado la representación de dicho Arquimediano III, así como el cálculo analítico de sus principales magnitudes, que tienen aplicación a este ejercicio.

En efecto, al unir los centros de dos caras contiguas del poliedro estudiado en esta lámina, se obtiene un "Arquimediano III", cuyo lado l_{III} es la dimensión que deseamos obtener ahora, y cuya esfera circunscrita es coincidente con la esfera tangente a las aristas del exaedro y octaedro dados. Mas como por otra parte, el radio de la esfera circunscrita al Arquimediano III es igual a su lado (ver lám. 34 (?) fórmula), tendremos finalmente

$$\boxed{l_{III}} = b = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\, a_1}$$



<u>2φ = ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas</u>

Si consideramos el diedro formado por dos caras contiguas en una arista cualquiera del poliedro derivado, y cortamos dicho diedro por un plano perpendicular a la arista, que pase al mismo tiempo por el centro de una de las caras, dicho plano pasará igualmente por el centro de la otra (todas las caras son iguales); las intersecciones de dicho plano con las dos caras, serán lados del ángulo rectilíneo del diedro.

Si unimos seguidamente los centros de las dos caras, se nos formará un triángulo isósceles <u>A·B·C</u> (fig. 4), cuya base <u>C·B</u> es la magnitud l_{III}, ya calculada, y los lados iguales la distancia del centro de la cara a la arista, o sea la manitud <u>p</u> también obtenida anteriormente. El ángulo <u>A</u> opuesto a la base será el buscado.

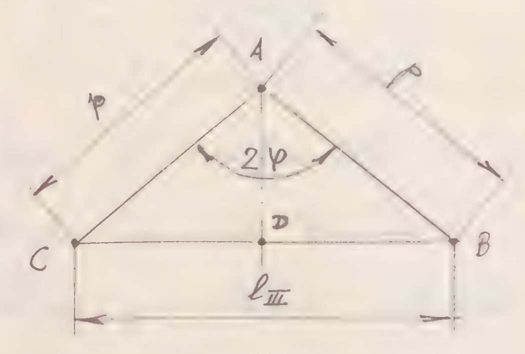
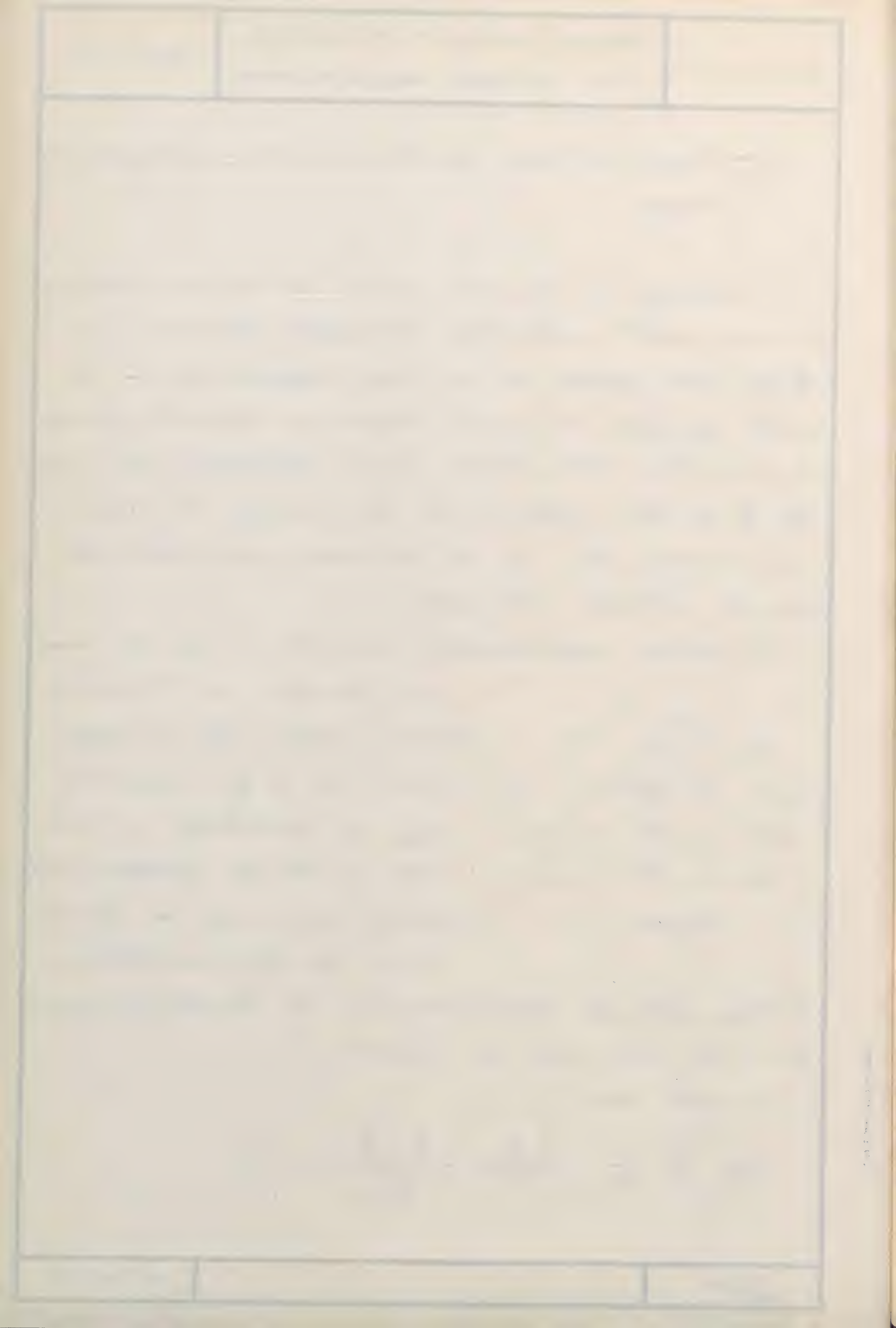


Figura 4

Su valor será:

$$\boxed{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{CD}{CA} = \frac{\frac{1}{2}\, l_{III}}{p} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_1}{\frac{\sqrt{6}}{6}\, a_1} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



Su valor numérico será:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \varphi = 60^\circ \qquad 2\varphi = 120^\circ$$

S = Superficie lateral

El área S_1 de una cara (rombo) se deduce de sus diagonales (fig. 2), y será:

$$S_1 = \frac{l_6 \times l_8}{2} = \frac{a_1 \times \sqrt{2}\, a_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_1)^2$$

y la total S del poliedro (12 caras)

$$\boxed{S} = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} (a_1)^2 = \boxed{6\sqrt{2}\,(a_1)^2}$$

V = Volumen

Si consideramos unidos los vértices de una cara, con el centro de la esfera circunscrita al poliedro derivado, se nos formará una pirámide recta de base rómbica y altura igual al radio c de la esfera inscrita. El volumen V_1 de dicha pirámide será pues

$$V_1 = S_1 \times \frac{1}{3} c = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_1)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2 \times 3} (a_1) = \frac{1}{6} (a_1)^3$$

y el volumen V total del poliedro (12 pirámides)

$$\boxed{V} = 12 \times \frac{1}{6} (a_1)^3 = \boxed{2\,(a_1)^3}$$

UNE A4 210 X 297



En el cuadro sinóptico que damos a continuación resumimos los resultados anteriores.

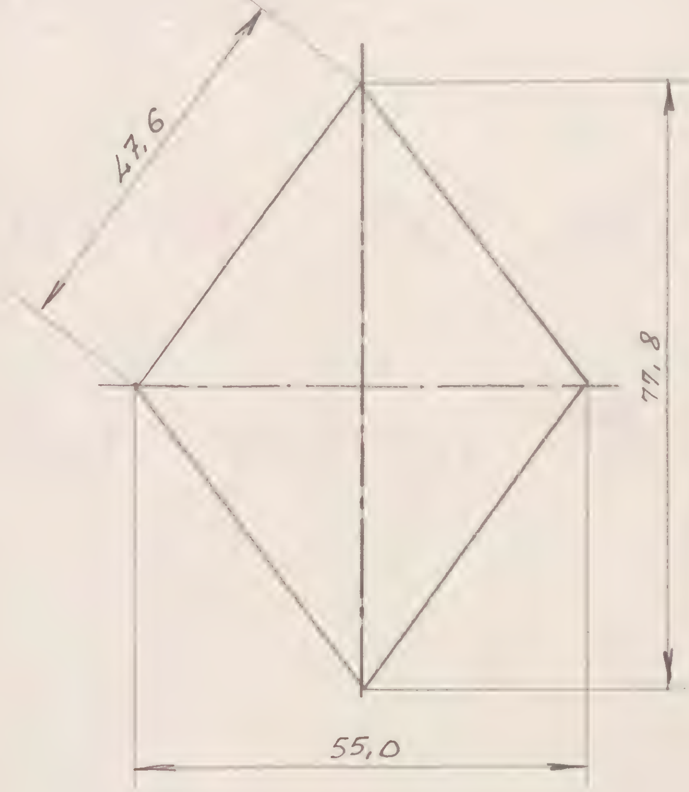
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
ℓ	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,a_1$	$0.86\,60\,25\ldots\,a_1$
a_2	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,a_1$	$0.86\,60\,25\ldots\,a_1$
b	$\frac{\sqrt{6}}{3}\,a_1$	$0,81\,64\,97\ldots\,a_1$
c	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,a_1$	$0.70\,71\,07\ldots\,a_1$
ℓ_8	$\sqrt{2}\,a_1$	$1,41\,42\,14\ldots\,a_1$
ℓ_6	a_1	$1,00\,00\,00\ldots\,a_1$
ℓ_{III}	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,a_1$	$0,70\,71\,07\ldots\,a_1$
p	$\frac{\sqrt{6}}{6}\,a_1$	$0,40\,82\,48\ldots\,a_1$
2φ	$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{sen}\varphi = 0,86\,60\,25\ldots$ $\varphi = 60^\circ \quad 2\varphi = 120^\circ$
S	$6\sqrt{2}\,(a_1)^2$	$8.48\,52\,81\ldots\,(a_1)^2$
V	$2\,(a_1)^3$	$2,00\,00\,00\ldots\,(a_1)^3$
Relaciones entre magnitudes		
$\ell = a_2$	$\ell_8 = 2c = 2\,\ell_{III}$	$c = \ell_{III}$



Lámina 31	Poliedros derivados de los regulares. De los conjugados exaedro-octaedro	Hoja nº 15

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 12 rombos, cuyas diagonales son los lados de los dos poliedros conjugados dados.



La longitud de la arista (47,6 mm) sirve de comprobación al trazado.

UNE A4 210 X 297

[firma]		8 - 10 - 72



Aclaración de
la NOTA al dorso
de las págs. 9 y 10

b) Radio de la esfera tangente a las aristas

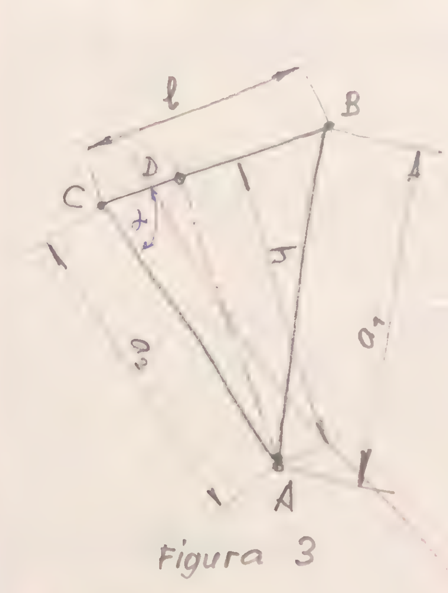


Figura 3

Si unimos los extremos C y B (fig. 3) de una arista del poliedro derivado, con el centro A de la esfera circunscrita, se nos formará un triángulo A.C.B, de lados $\overline{CB} = l$, $\overline{AC} = a_2$ y $\overline{AB} = a_1$. La altura $\overline{AD}$ correspondiente al lado $\overline{CB}$, será el radio pedido.

En Geometría se demuestra que el área F del triángulo ABC, tiene el valor

$$F = \frac{1}{2} a\, h = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b')\,(s-c)}$$

siendo s el semiperímetro; a, b', c los lados del triángulo, y h la altura correspondiente al lado a. De aquí se deduce que

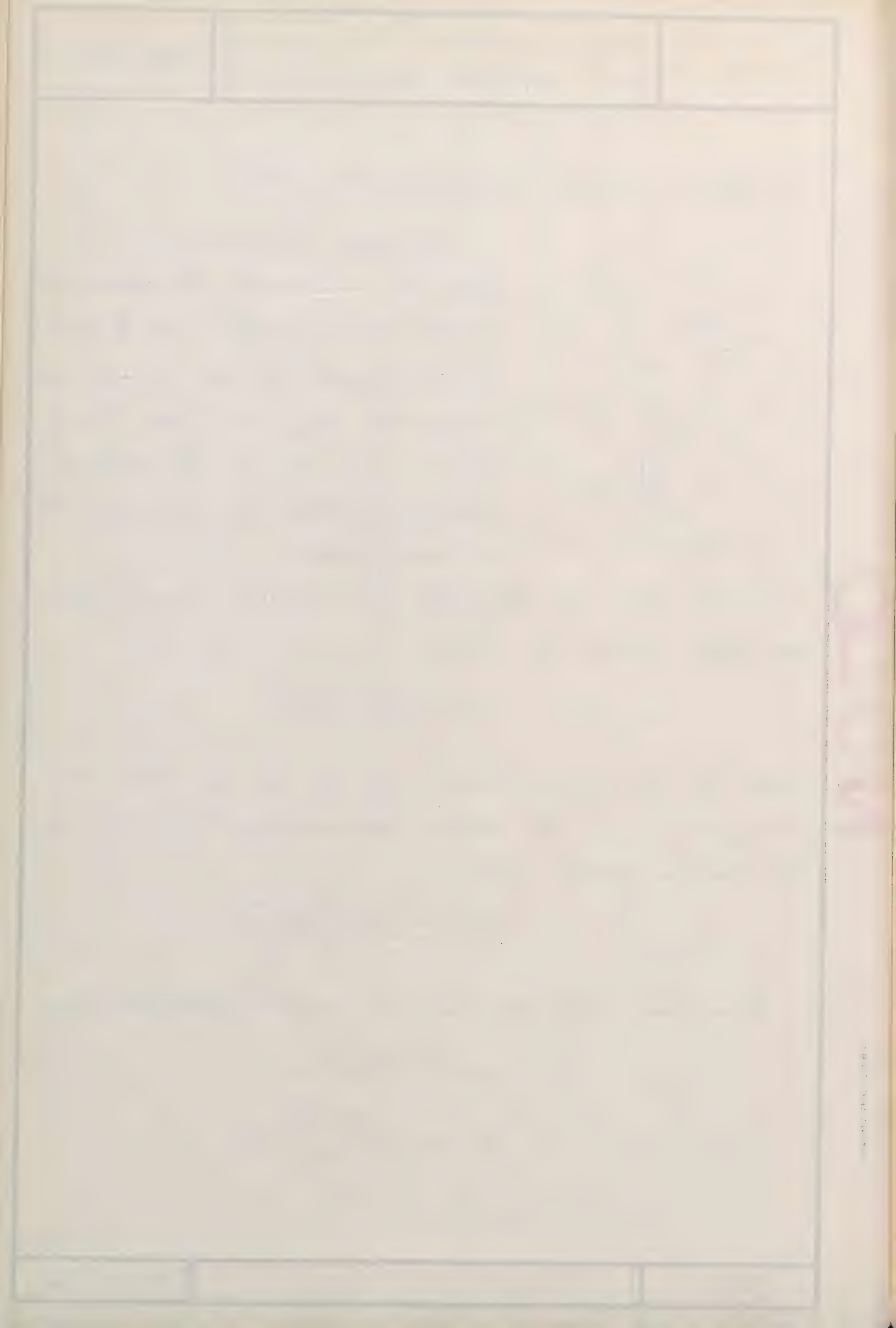
$$h = \frac{2\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b')\,(s-c)}}{a}$$

En el caso particular que nos ocupa tendremos que

$$a = l = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\; a_1$$

$$b' = a_2 = \sqrt{\frac{3\,(5-\sqrt{5})}{10}}\; a_1$$

$$c = a_1$$



$$s = \frac{a + b + c}{2} = \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1 + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1 + a_1 \right) \times \frac{1}{2}$$

$$s - a = \left(\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1 + a_1 \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} + 1 \right) a_1$$

$$s - b' = \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1 + a_1 \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + 1 \right) a_1$$

$$s - c = \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1 + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1 \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} \right) a_1$$

$$h = b$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula general, tendremos:

$$b = \frac{2 \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} + 1 \right) \times \frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} + 1 \right) \times \frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + 1 \right) \times \frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} \right) \times \frac{a_1}{2}}}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \times a_1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\, a_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} + 1 \right) \times \left(\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} + 1 \right) \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + 1 \right) \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} \right)}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}\; a_1 =$$

y haciendo $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = p$ y $\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} = q$, tendremos:

$$b = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{(p+q+1)(q+1)(p+1)(p+q)}{p^2}} =$$

NULO

UNE A4 210 X 297

$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1$ ~~$l = a_1$~~

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a_1\right)^2 + (a_1)^2 - (a_1)^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \times a_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l = a_2 \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} a_1$$

$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1$ $l = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1$

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1}{2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + 1 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

I

III

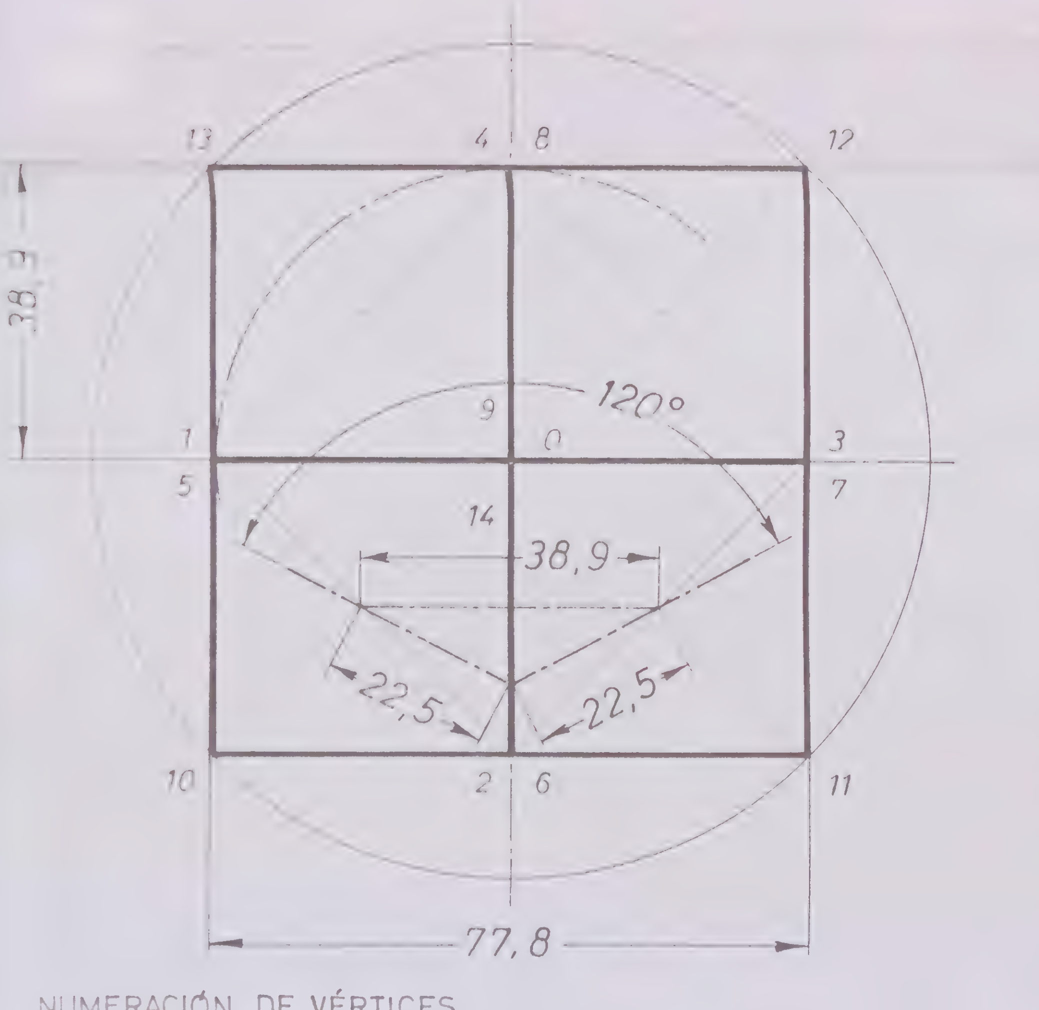
+Z

+X

O

+Y

II



+Y

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un exaedro regular y de su octaedro conjugado por sus aristas, cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

El radio de la esfera circunscrita al octaedro dado es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O, son:
O (72, 72, 85) mm.

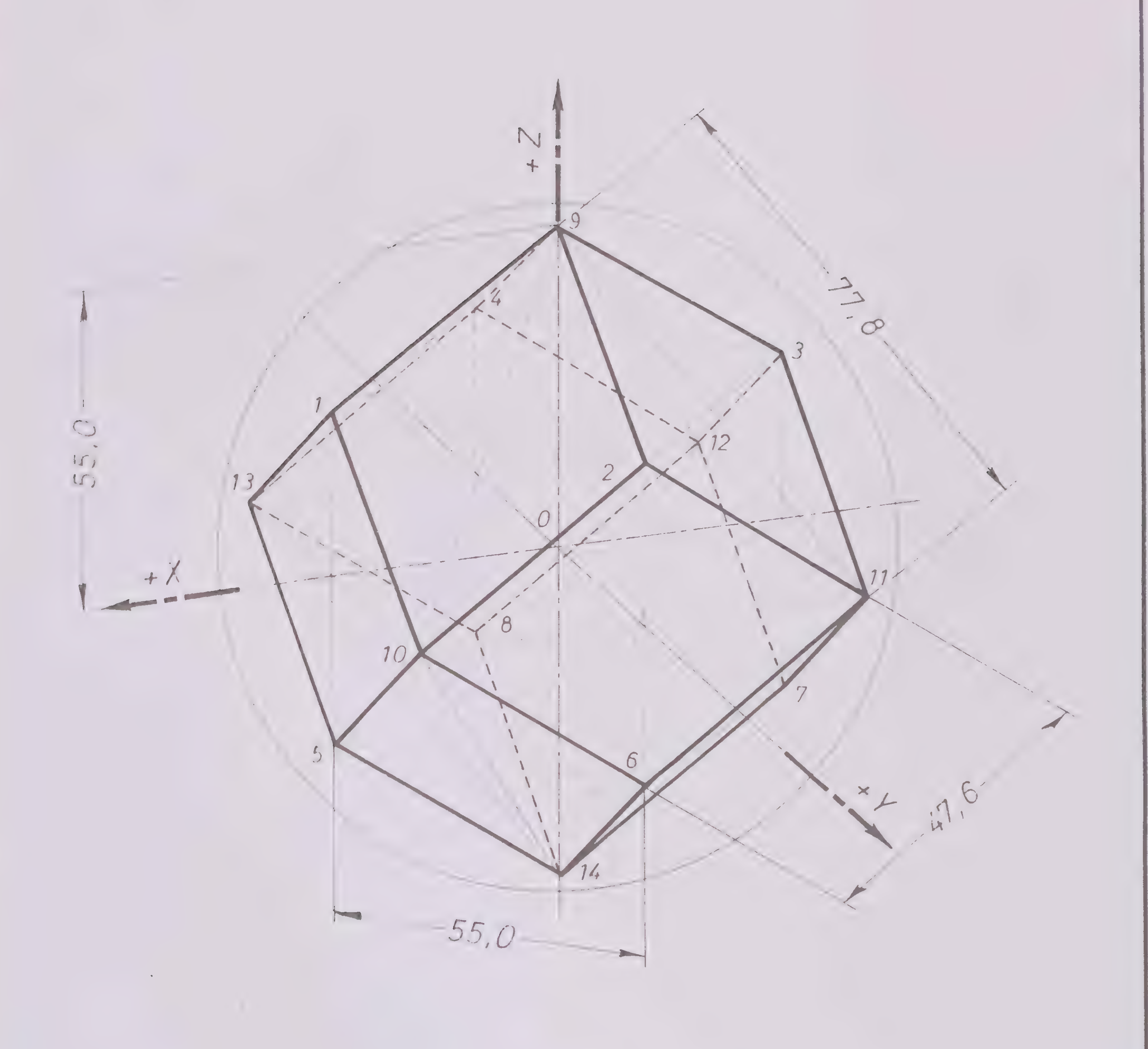
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro conjugado (rojo)	1 al 8
Octaedro dado (azul)	9 al 14
Poliedro derivado	1 al 14

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha						
Alumno						

Escala		
1:1	Derivado de los conjugados exaedro-octaedro	Lámina 31 Curso 19 -19



Derivado de los conjugados exaedro-octaedro

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un dodecaedro regular y de su icosaedro conjugado por sus aristas, cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

El radio de la esfera circunscrita al icosaedro (de mayor radio), es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O son: O(72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 72, 85) mm

a_{20} = 55 mm

UNE A4 210 X 297

DODECAEDRO - ICOSAEDRO

CONSIDERACIONES PREVIAS

En las láminas 16 y 17 hemos estudiado los poliedros conjugados del dodecaedro e icosaedros regulares, obtenidos al trazar por los puntos medios de las aristas del poliedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas y el centro de aquél.

En la lámina 18 hemos representado el poliedro obtenido por la intersección de ambos conjugados.

En la presente lámina 31 vamos a estudiar el poliedro derivado de ambos conjugados cuando se unen sucesivamente los extremos de cada dos aristas correspondientes, con lo cual obtenemos rombos todos iguales, que serán las caras del poliedro pedido.

Previamente al estudio de su trazado, vamos a deducir las propiedades geométricas de este poliedro derivado.

1º Todas sus caras son iguales y tienen la forma de rombos.

En efecto, en los trazados gráficos de la las láminas 16 a 18 puede observarse que las aristas del icosaedro son mayores que las de su dodecaedro conjugado. Esto puede comprobarse analíticamente mediante la fórmula 30, lám. 4, y fórmula 43, lám. 5 siguientes:



$$a_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l_{12} \quad \text{y} \quad a_{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20},$$ en las que

despejando l_{12} y l_{20}, tendremos

$$\boxed{l_{12}} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}}\, a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\, a_{12}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l_{12}} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}}\, a_{12} =$

$$= \frac{4(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{15 - 3}\, a_{12} = \frac{4(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{12}\, a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\, a_{12}} \quad \text{y}$$

$$\boxed{l_{20}} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\, a_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}\, a_{20}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l_{20}} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{16}{10 + 2\sqrt{5}}}\, a_{20}$

$$= \sqrt{\frac{16(10 - 2\sqrt{5})}{100 - 20}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{16(10 - 2\sqrt{5})}{80}}\, a_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}\, a_{20}}$$

en las que haciendo $a_{12} = a_{20}$, y siendo

$$\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2} = 0{,}71\ 36\ 44 \ldots \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} = 1{,}05\ 14\ 62 \ldots$$

tendremos que

$$\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} > \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2}$$

por lo que será

$$l_{20} > l_{12}$$

y con mayor motivo, cuando como en el caso que nos ocupa, es

$$a_{20} > a_{6}$$



Así pues, al ser $l_{20} > l_{12}$, el cuadrilátero obtenido al unir sucesivamente los extremos de dos aristas correspondientes en los dos poliedros conjugados, son rombos, todos iguales y caras del poliedro derivado.

2ª El número de caras del poliedro derivado, será de 30

En efecto, en virtud de su generación, cada cara contiene una arista del dodecaedro y también otra del icosaedro; en ambos poliedros es de 30 el número de sus aristas.

3ª El número de vértices del poliedro derivado es de 32

Este número será el de la suma de los vértices del dodecaedro (20) y del icosaedro (12).

4ª El poliedro derivado es convexo

Pues al prolongar el plano de cualquiera de sus caras, queda todo él en el mismo semiespacio.

5ª El número de aristas será de 60

Por ser convexo se verificará la relación de Euler, en la que

$$C + V = A + 2$$

de la que se deduce A, ya que conocemos C = 30 y V = 32.
Todas las aristas son iguales



6º Los ángulos sólidos formados en los vértices del dodecaedro son triedros, y los formados en los vértices del icosaedro, son pentaedros.

puesto que en dichos vértices concurren respectivamente tres o cinco aristas de los poliedros conjugados. Así pues existirán en el poliedro derivado 20 ángulos sólidos triedros y 12 pentaedros.

7º Existe una esfera que pasa por los vértices pentaedros

La circunscrita al icosaedro dado

8º Existe una esfera, concéntrica con la anterior y distinta de ésta, que pasa por los vértices triedros

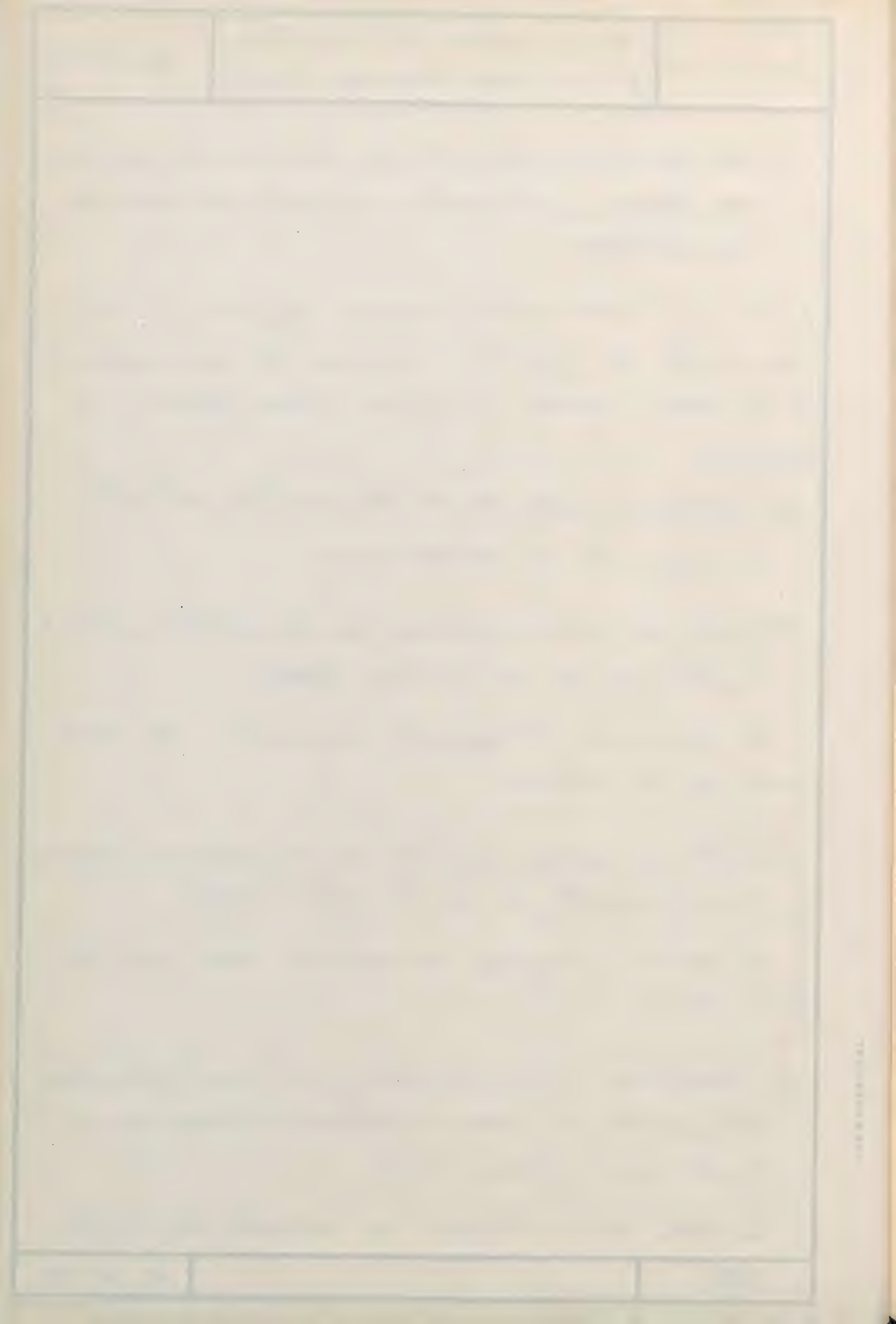
La circunscrita al dodecaedro conjugado y de menor radio que la anterior.

9º Existe una esfera, concéntrica con las anteriores, tangente a las aristas, no en su punto medio.

Es válida la análoga demostración dada en la lámina 31.

10º Existe una esfera, concéntrica con las anteriores, tangente a todas las caras del poliedro derivado, en el centro del rombo (esfera inscrita).

La esfera común tangente a las aristas de los dos



PROCESO GRÁFICO

El trazado gráfico del poliedro pedido consiste en determinar previamente los vértices del icosaedro dado y seguidamente los del dodecaedro conjugado.

A continuación bastará unir consecutivamente, formando un cuadrilátero (paralelógramo en las proyecciones), los extremos de cada dos aristas perpendiculares correspondientes (una de cada poliedro); estudiando en cada proyección la visibilidad de las aristas del poliedro buscado se obtendrá fácilmente la representación de éste.

Para el trazado del icosaedro dado y del dodecaedro conjugado, se seguirá el proceso estudiado en la lámina 18, por lo que omitimos su repetición.

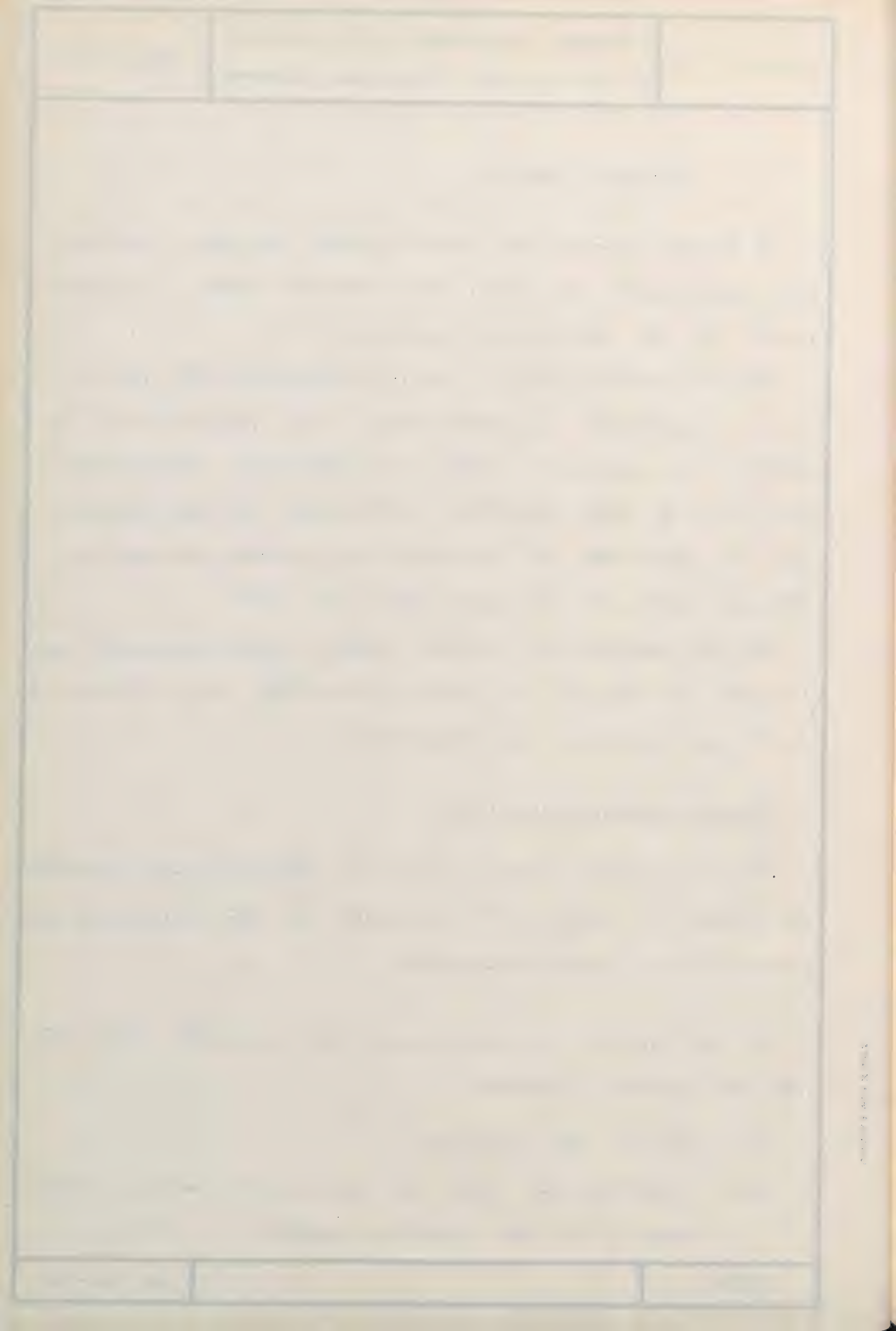
PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para simplificar y dar al mismo tiempo mayor exactitud al trazado, es muy útil el empleo de cotas calculadas previamente en forma analítica.

En este ejercicio consideraremos las siguientes magnitudes del poliedro derivado:

l = Arista del poliedro

a_1 = Radio de la esfera que pasa por los vértices pentaédricos (los del icosaedro dado)



a_2 = Radio de la esfera que pasa por los vértices triedros (la del dodecaedro conjugado)

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c = Radio de la esfera tangente a las caras.

l_{20} = Arista del icosaedro dado.

l_{12} = Arista del dodecaedro conjugado.

l_{IV} = Distancia entre los centros de dos caras contiguas.

p = Distancia del centro de una cara a uno de sus lados

2φ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas

S = Superficie lateral

V = Volumen.

Todas las magnitudes anteriores las calcularemos en función de a_1, radio de la esfera circunscrita al icosaedro regular dado

---

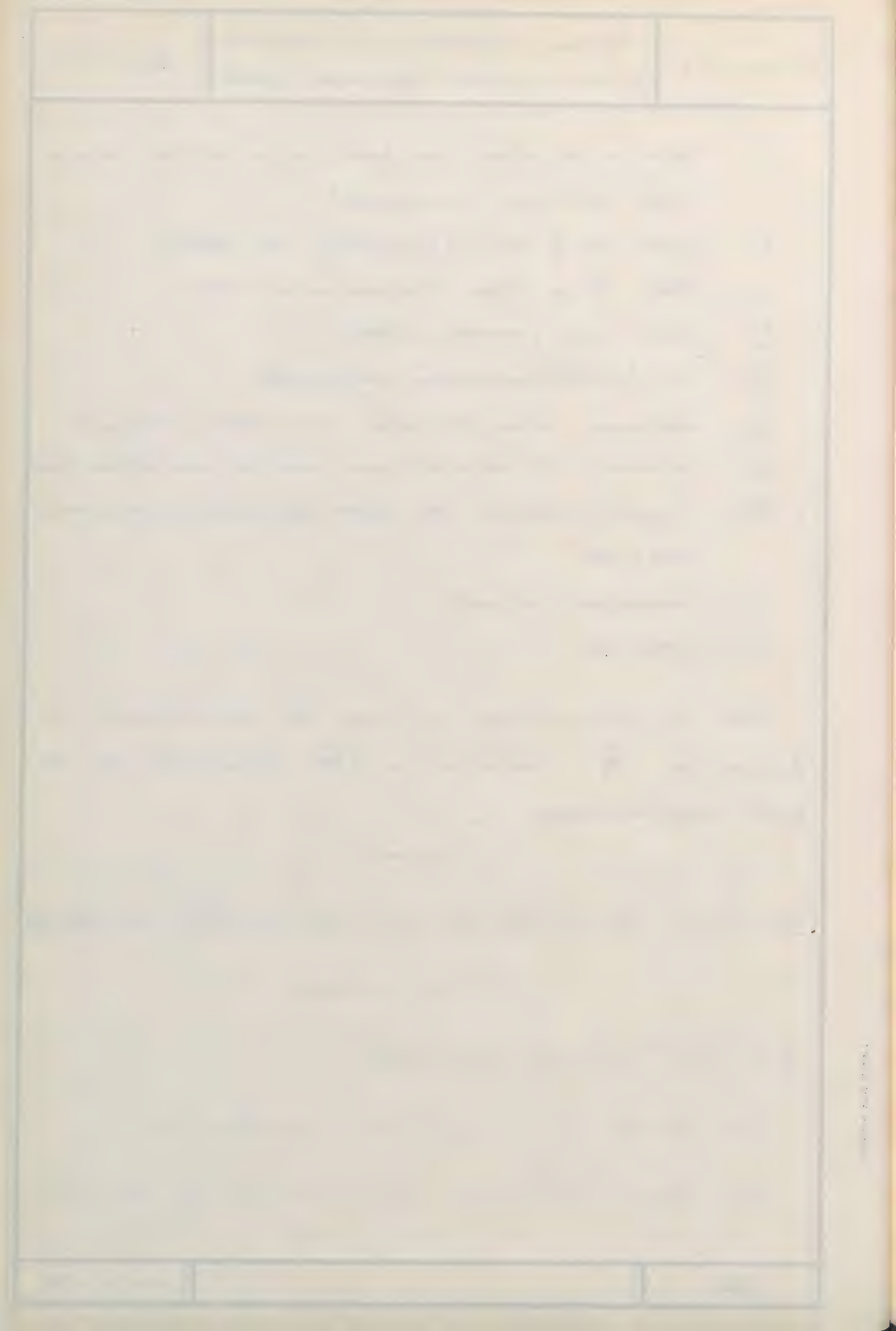
a_1 = Radio de la esfera que pasa por los vértices pentaédricos

Dato del ejercicio

l_{20} = Arista del icosaedro dado

De la fórmula 165 de la lámina 16, se obtiene que

$$a_1 = a'_{20} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\; l_{12}$$ y de la fórmula 164, que



$$\boxed{l_{20}} = l'_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l_{20}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\, a_1 =$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\, a_1 = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5+2\sqrt{5}}\, a_1 = \frac{(1+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{25-20}\, a_1 =$$

$$= \frac{(5+5\sqrt{5}-2\sqrt{5}-10)\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\, a_1 = \frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\, a_1 = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)^2}}{5}\, a_1$$

$$= \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(45+25-30\sqrt{5})}}{5}\, a_1 = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(70-30\sqrt{5})}}{5}\, a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \sqrt{\frac{2(5+2\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \sqrt{\frac{2(35+14\sqrt{5}-15\sqrt{5}-30)}{5}}\, a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}$$

l_{12} = Arista del dodecaedro conjugado

De la fórmula 165, lám. 16, se deduce

$$a_1 = a'_{20} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l_{12} \qquad \text{de donde}$$

$$\boxed{l_{12}} = \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\, a_1 = \boxed{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l_{12}} = \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\, a_1 = \frac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5+2\sqrt{5}}\, a_1 =$

$$= \frac{2(5-2\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{25-20}\, a_1 = \frac{2\sqrt{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})^2}}{5}\, a_1 = \frac{2\sqrt{(25-20)(5-2\sqrt{5})}}{5}\, a_1 =$$



$$= \frac{2\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}}{5}\, a_1 = \boxed{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}$$

l = Arista del poliedro

l_{20} y l_{12} son las diagonales del rombo que forma una cara, por lo que (fig. 1)

$$\boxed{l} = \sqrt{\left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_{12}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1\right)^2} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{l} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{10-2\sqrt{5}}{5}\times(a_1)^2 + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}(a_1)^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}+10-4\sqrt{5}}{10}}\, a_1 = \sqrt{\frac{15-5\sqrt{5}}{10}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1}$$

p = Distancia del centro de una cara a uno de sus lados

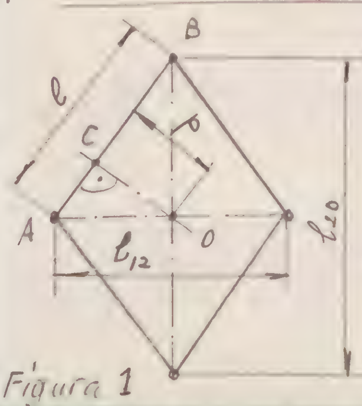


Figura 1

En la figura 1 hemos representado una cara del poliedro pedido (rombo de diagonales l_{20} y l_{12}).

Tracemos por O la perpendicu-



lar al lado $\underline{AB}$, siendo $\underline{C}$ el pie de la misma.

Los triángulos rectángulos $\underline{A \cdot O \cdot B}$ y $\underline{AOC}$ son semejantes (ángulo $\underline{C \cdot A \cdot O}$ común), por lo que

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \quad \text{de donde} \quad \overline{OC} = \frac{\overline{AO} \times \overline{BO}}{\overline{AB}}$$

y sustituyendo los valores $\overline{OC} = p$, $\overline{AO} = \frac{l_{12}}{2}$; $\overline{BO} = \frac{l_{20}}{2}$, $\overline{AB} = l$,

tendremos:

$$p = \frac{\frac{1}{2} l_{12} \times \frac{1}{2} l_{20}}{l} = \frac{l_{12} \times l_{20}}{4 l} ;$$

los valores l_{12}, l_{20} y l, son ya conocidos anteriormente

por lo que

$$\boxed{p} = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1} = \boxed{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{p} = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1} = \frac{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5} \times \frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{25}} : \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right) a_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{25} : \frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5}) \cdot 2(5-\sqrt{5})}{25(3-\sqrt{5})}}\, a_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{25 - 10\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 10}{3-\sqrt{5}}}\, a_1 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{35 - 15\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}\, a_1 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5(7-3\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}}\, a_1$$

UNE A4 210 X 297



$$= \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5(7-3\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4}}\, a_1 = \frac{1}{10}\sqrt{5(21-9\sqrt{5}+7\sqrt{5}-15)}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{5(6-2\sqrt{5})}\, a_1 = \frac{1}{10}\sqrt{10(3-\sqrt{5})}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}}\, a_1}$$

a_2 = Radio de la esfera que pasa por los vértices triedros

Es el radio de la esfera circunscrita al dodecaedro conjugado de lado l_{12}, siendo el valor de éste, en función de a_1

$$l_{12} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1$$

y teniendo en cuenta la fórm. 30, lám. 4

$$\boxed{a_2} = a_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, l_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{a_2} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 =$

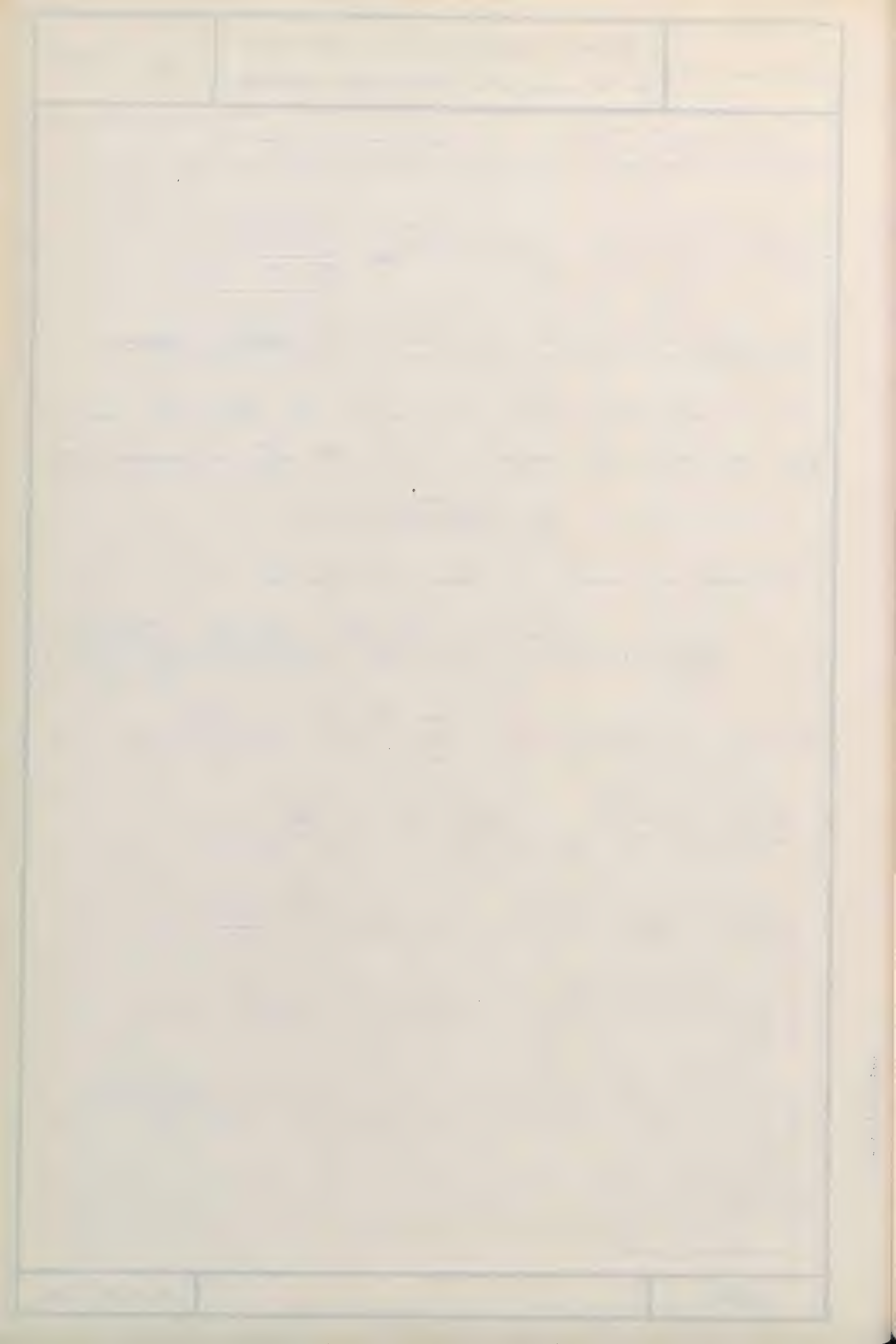
$$= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{15}+\sqrt{3})^2 \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(15+3+2\sqrt{45}) \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(18+6\sqrt{5}) \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6(3+\sqrt{5}) \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}(3+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}(15+5\sqrt{5}-6\sqrt{5}-10)}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}(5-\sqrt{5})}\, a_1 = \sqrt{\frac{6(5-\sqrt{5})}{20}}\, a_1 =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1}$$



b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

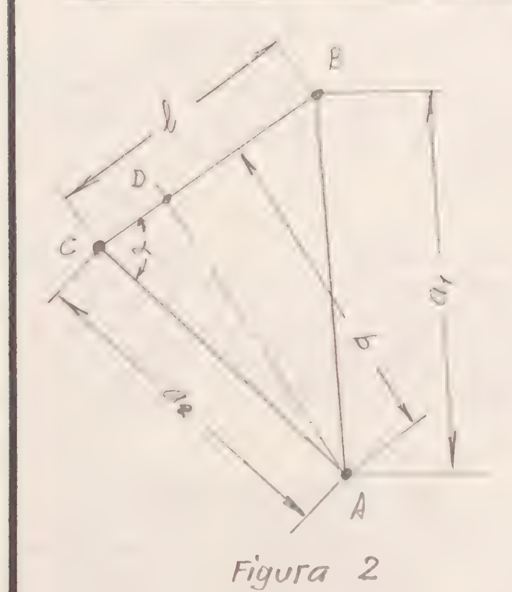


Figura 2

Si unimos los extremos C y B (fig. 2) de una arista del poliedro derivado, con el centro A de su esfera circunscrita, se nos formará el triángulo A·B·C, de lados $CB = l$; $AC = a_2$ y $AB = a_1$.

La altura $AD = b$, correspondiente al lado l, será el radio pedido, por lo que

$$b = a_2 \operatorname{sen} \alpha \qquad (1)$$

El valor del ángulo α, se deduce de la fórmula trigonométrica

$$(a_1)^2 = (a_2)^2 + l^2 - 2\, a_2\, l \cos\alpha$$

de la que

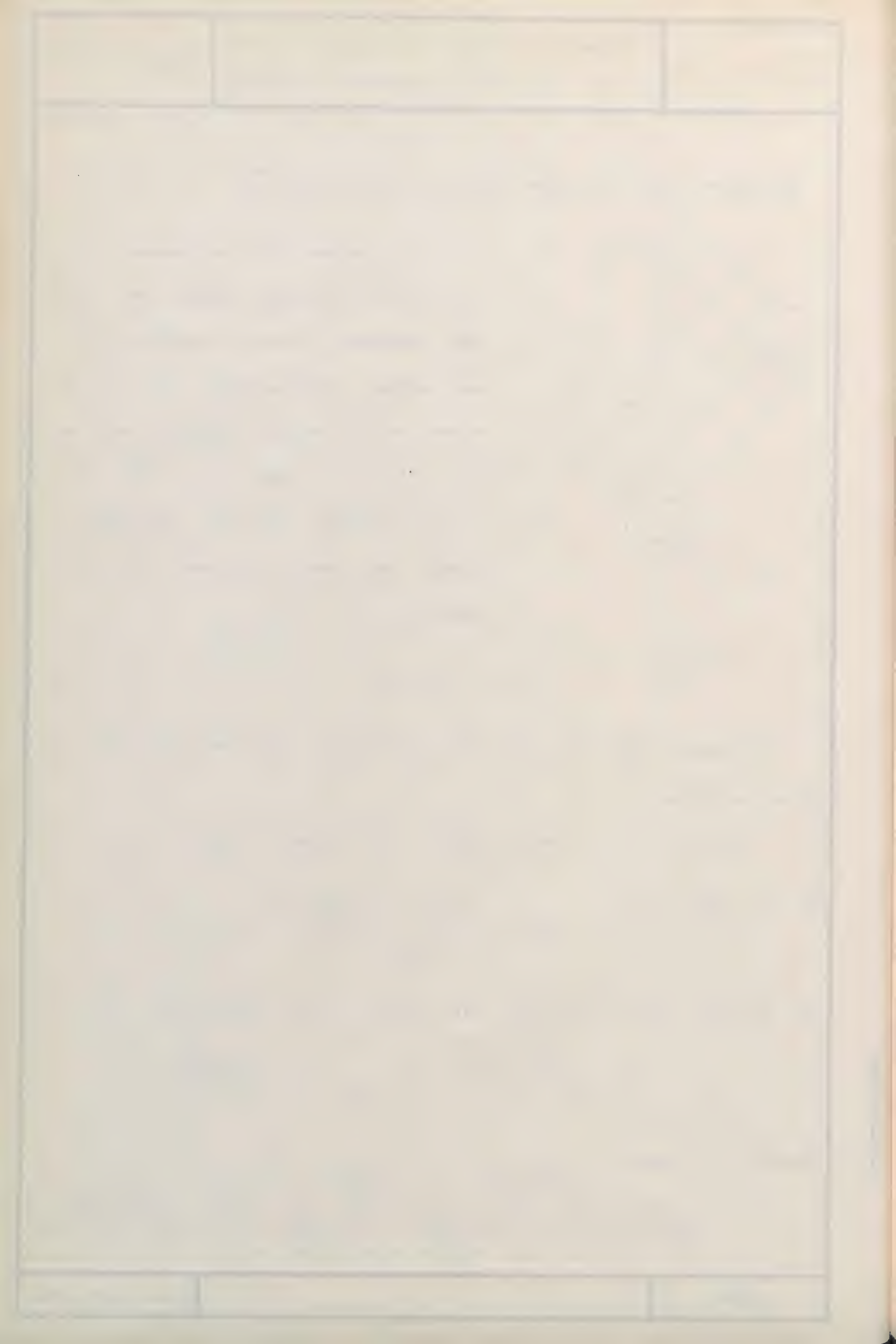
$$\cos\alpha = \frac{(a_2)^2 + l^2 - (a_1)^2}{2\, a_2\, l}$$

en la que sustituyendo los valores ya deducidos de

$$a_2 = \sqrt{\frac{3\,(5-\sqrt{5})}{10}}\; a_1 \qquad \text{y} \qquad l = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\; a_1$$

tendremos que

$$\boxed{\cos\alpha} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3\,(5-\sqrt{5})}{10}}\; a_1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\; a_1\right)^2 - (a_1)^2}{2\sqrt{\frac{3\,(5-\sqrt{5})}{10}}\; a_1 \times \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\; a_1} = \boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}\; a_1}$$



Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\cos\alpha} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\,a_1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,a_1\right)^2 - (a_1)^2}{2\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\,a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,a_1} =$$

$$= \frac{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}(a_1)^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(a_1)^2 - (a_1)^2}{2\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}}\,(a_1)^2} = \frac{\frac{15-3\sqrt{5}}{10} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1}{2\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}}} =$$

$$= \frac{\frac{15-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}-10}{10}}{\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})}{5}}} = \frac{\frac{20-8\sqrt{5}}{10}}{\sqrt{\frac{3(15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{5}}} = \frac{\frac{10-4\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\frac{3(20-2\sqrt{5})}{5}}} =$$

$$= \frac{\frac{2(5-2\sqrt{5})}{5}}{\sqrt{\frac{12(5-2\sqrt{5})}{5}}} = \frac{\frac{2}{5}(5-2\sqrt{5})}{2\sqrt{\frac{3}{5}(5-2\sqrt{5})}} = \frac{1}{5}\times\frac{(5-2\sqrt{5})}{\sqrt{\frac{3}{5}(5-2\sqrt{5})}} =$$

$$= \frac{1}{5}\times\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})^2}{\frac{3}{5}(5-2\sqrt{5})}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5(5-2\sqrt{5})}{3}} = \boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}}$$

De aquí se deduce que

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}\right)^2} =$

$$= \sqrt{1-\frac{5-2\sqrt{5}}{15}} = \sqrt{\frac{15-5+2\sqrt{5}}{15}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{15}} = \boxed{\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}}}$$

Valor que sustituido en la expresión inicial (1), nos da

UNE A4 210 X 297



$$\boxed{b} = a_2 \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{b} = \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}} = \sqrt{\frac{3 \times 2 \times (5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{10 \times 15}}\, a_1 = \sqrt{\frac{5^2-5}{5 \times 5}}\, a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{25}}\, a_1 = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}\, a_1}$$

---

c – Radio de la esfera tangente a las caras

Es igual al radio de la esfera tangente a las aristas de uno de los poliedros dados.

Tomando como base el dodecaedro, su arista, determinada anteriormente en función de a_1, es

$$l_{12} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1$$

y el radio de la esfera tangente a las aristas de este dodecaedro, valdrá (ver fórm. 31, lám. 4)

$$\boxed{c} = b_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{c} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{5}}\, a_1 =$$

UNE A4 210 X 297



$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(9+5+6\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(14+6\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{5}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\, a_1}$$

Este mismo valor se obtiene partiendo del icosaedro, cuya arista es

$$l_{20} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1$$

y el radio de la esfera tangente (ver fórm. 44. lám. 5)

$$\boxed{c} = b_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\, l_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 =$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5}}\, a_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{5}}\, a_1 =$$

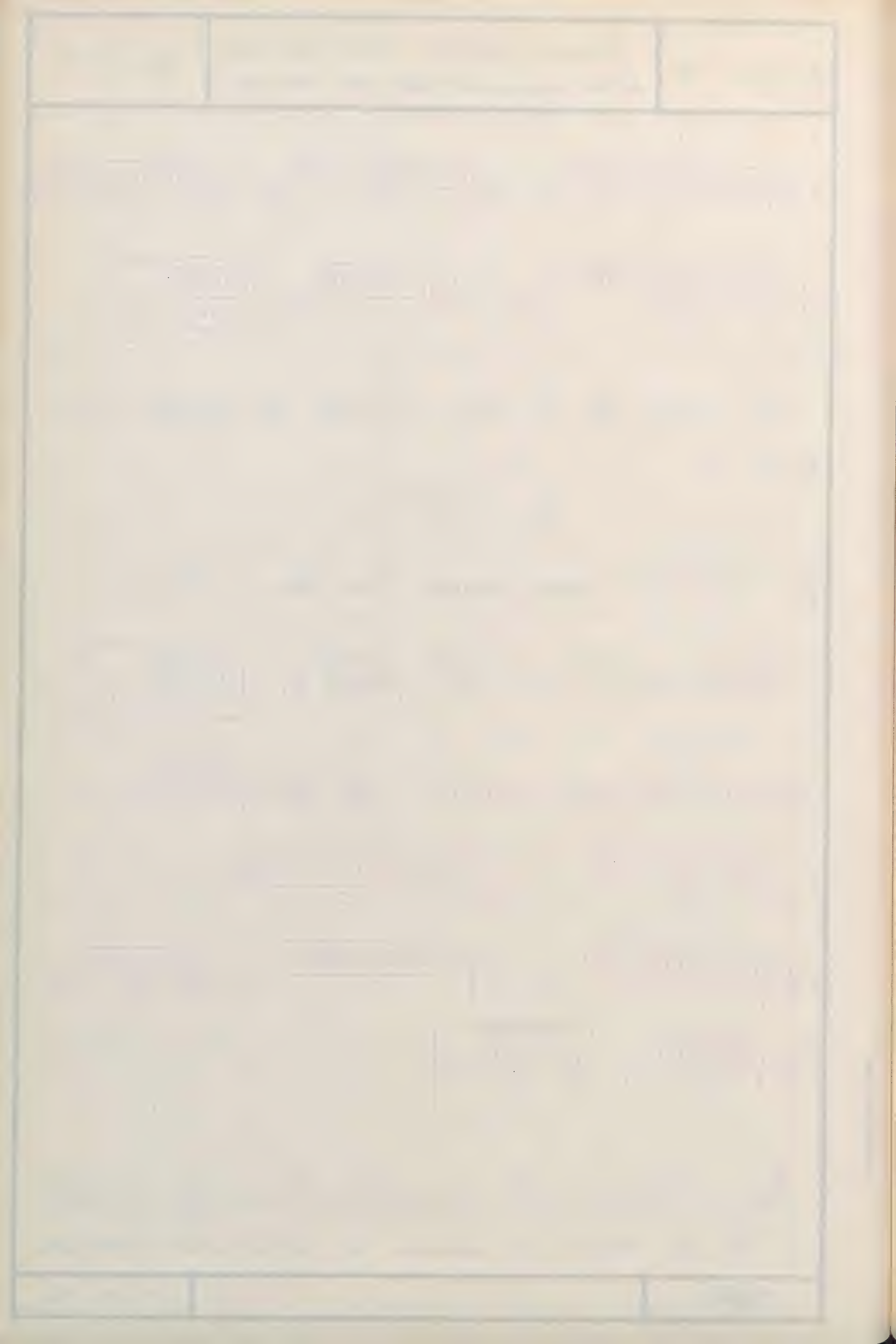
$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_1}$$

l_{IV} = Distancia entre los centros de dos caras contiguas

En el estudio que hicimos en la lámina 18 del polie-

UNE A4 210 X 297



dro obtenido por la intersección del dodecaedro e icosaedro conjugados por sus aristas, vimos que el sólido común a ambos es un poliedro no regular, convexo, compuesto de 12 pentágonos regulares y 20 triángulos equiláteros de lados de igual longitud.

Este poliedro es un caso particular de los más generales denominados "Poliedros arquimedianos" y lo hemos designado con el nombre de "Arquimediano III".

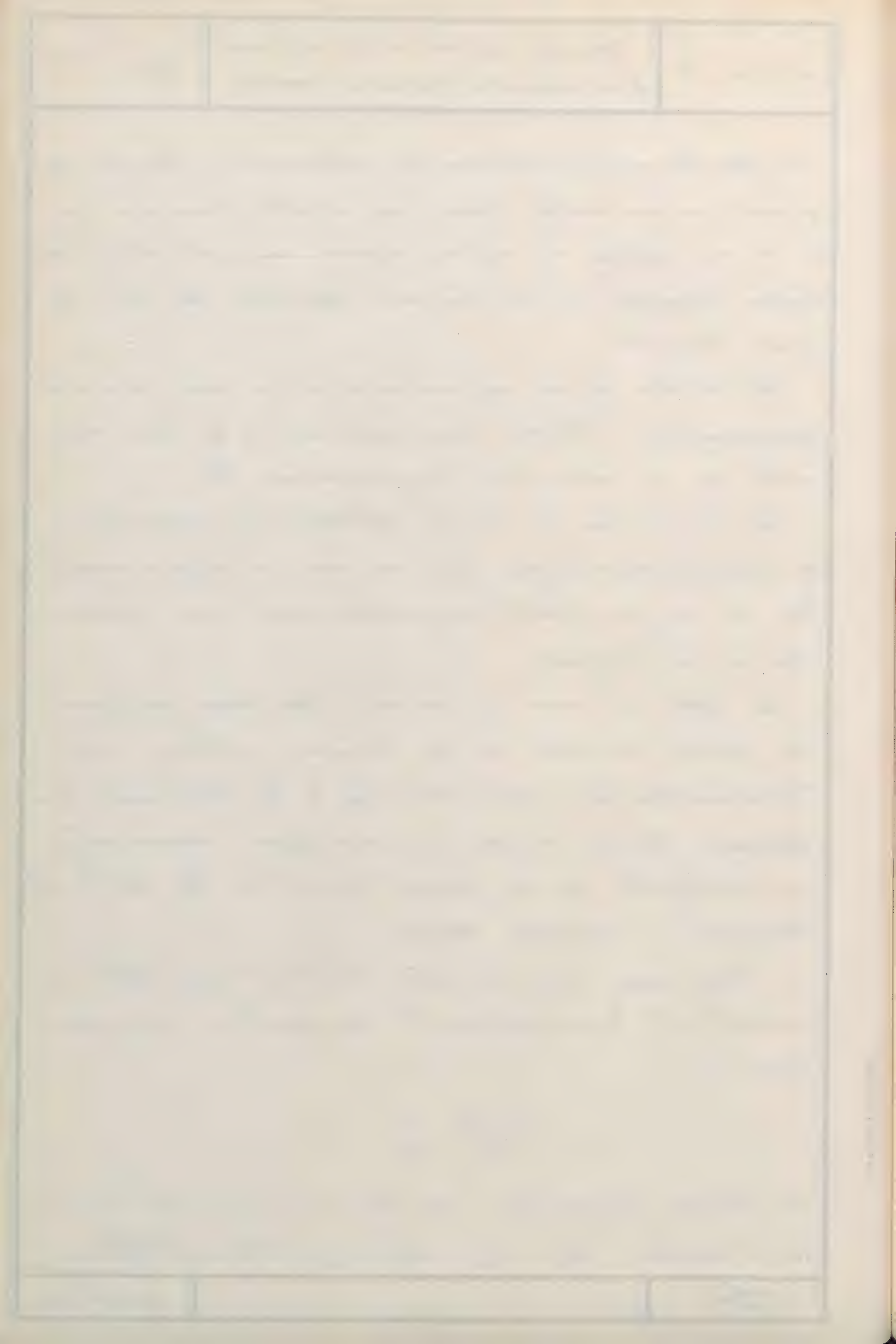
En la lámina 35 se ha efectuado la representación de dicho Arquimediano III, así como el cálculo analítico de sus principales magnitudes que tienen aplicación a este ejercicio.

En efecto, al unir los centros de dos caras contiguas del poliedro estudiado en esta lámina, se obtiene un "Arquimediano IV" cuyo lado l_{IV} es la dimensión que deseamos obtener ahora, y cuya esfera circunscrita es coincidente con la esfera tangente a las aristas del dodecaedro e icosaedro dados.

Mas como por otra parte el radio de la esfera circunscrita al Arquimediano IV es igual a (ver lám. 35 fórm.)

$$a_{IV} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\ l_{IV}$$

se verificará igualmente (ver lám. 16. fórm. 166), en función del icosaedro: $a_{IV} = b'_{20} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\ l_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\ a_1$



por lo que igualando expresiones

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\; l_{IV} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; a_1 \qquad \text{de donde}$$

$$\boxed{l_{IV}} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}\; a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{l_{IV}} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}\; a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5} : \frac{3+\sqrt{5}}{2}}\; a_1 =$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}}\; a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{5(3+\sqrt{5})}}\; a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}\; a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(15-6\sqrt{5}+5\sqrt{5}-10)}\; a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10}(5-\sqrt{5})}\; a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; a_1}$$

Al mismo resultado llegaríamos tomando el radio de la esfera tangente a la arista del dodecaedro dado.

Entonces tendríamos (ver lám. 17, form. 183)

$$a_{IV} = b'_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\; l_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\; a_1$$

UNE A4 210 X 297



que juntamente con la

$$a_{IV} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\; l_{IV}$$

nos permite despejar l_{IV}, así:

$$\boxed{l_{IV}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}\; a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{l_{IV}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}\; a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5} : \frac{3+\sqrt{5}}{2}}\; a_1 =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{4(5-\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}}\; a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5(3+\sqrt{5})}}\; a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5(3+\sqrt{5})}}\; a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}}\; a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}}\; a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}\; a_1 =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; a_1}$$

valor coincidente con el anterior

2Ψ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

Si consideramos el diedro formado por dos caras contiguas en una arista cualquiera del poliedro derivado,

UNE A4 210 X 297



y cortamos dicho diedro por un plano perpendicular a la arista, que pase al mismo tiempo por el centro de una de las caras, dicho plano pasará igualmente por el centro de la otra (todas las caras son iguales); las intersecciones de dicho plano con las dos caras, serán los lados del ángulo rectilíneo del diedro.

Si unimos seguidamente los centros de las dos caras, se nos formará un triángulo isósceles A·B·C (fig. 3), cuya base C·B es la magnitud "l_{IV}", ya calculada, y los lados iguales la distancia del centro de la cara a la arista (fig. 2), o sea la magnitud p también obtenida anteriormente. El ángulo A opuesto a la base, será el buscado, por lo que

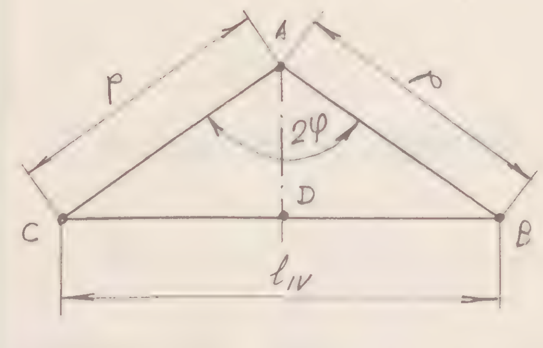


Figura 3

$$\boxed{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{CD}{CA} = \frac{\frac{1}{2} l_{IV}}{p} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, a_1}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}}\, a_1} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen}\varphi} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, a_1}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}}\, a_1} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} : \frac{3-\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

UNE A4 210 X 297



Su valor numérico será

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7,23\ 60\ 67\ 98}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3,61\ 80\ 33\ 99}$$

$$\lg \operatorname{sen} \varphi = \log .\ 0,5 \text{ ———— } \bar{1},698\ 97\ 00$$

$$+\frac{1}{2}\lg 3,61\ 80\ 33\ 99 = \frac{0,558\ 47\ 27}{2} = \quad + 0,279\ 23\ 63$$

$$\bar{1},978\ 20\ 63 = \lg \operatorname{sen} \varphi$$

$$\varphi = 72^\circ \qquad 2\varphi = 144^\circ$$

S = Superficie lateral

El área S_1 de una cara (rombo) se deduce de sus diagonales (fig. 1) y será:

$$\boxed{S_1} = \frac{l_{12} \times l_{20}}{2} = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}-5}{5}\,(a_1)^2}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$S_1 = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}{2} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5} \times \frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\,(a_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{2(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}\,(a_1)^2 = \frac{1}{5}\sqrt{2(25-10\sqrt{5}-5\sqrt{5}+10)}\,(a_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{2(35-15\sqrt{5})}\,(a_1)^2 = \frac{1}{5}\sqrt{2\times 5\,(7-3\sqrt{5})}\,(a_1)^2 = \sqrt{\frac{2(7-3\sqrt{5})}{5}}\,(a_1)^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{7-3\sqrt{5}}\,(a_1)^2 =$$ y por ser $7^2-(3\sqrt{5})^2 = 4$, tendremos



$$= \sqrt{\frac{2}{5}} \times \left(\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)(a_1)^2 = \left(\sqrt{\frac{18}{10}} - \sqrt{\frac{10}{10}}\right)(a_1)^2 = \left(\sqrt{\frac{9}{5}} - 1\right)(a_1)^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 1\right)(a_1)^2 = \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} - 1\right)(a_1)^2 = \frac{3\sqrt{5} - 5}{5}(a_1)^2$$

y la superficie total del poliedro (30 caras)

$$\boxed{S} = 30 \times \frac{3\sqrt{5} - 5}{5}(a_1)^2 = \boxed{6\,(3\sqrt{5} - 5)\,(a_1)^2}$$

V = Volumen

Si consideramos unidos los vértices de una cara con el centro de la esfera circunscrita al poliedro derivado, se nos formará una pirámide recta de base rómbica y altura igual al radio <u>c</u> de la esfera inscrita. El volumen V_1 de dicha pirámide será pues

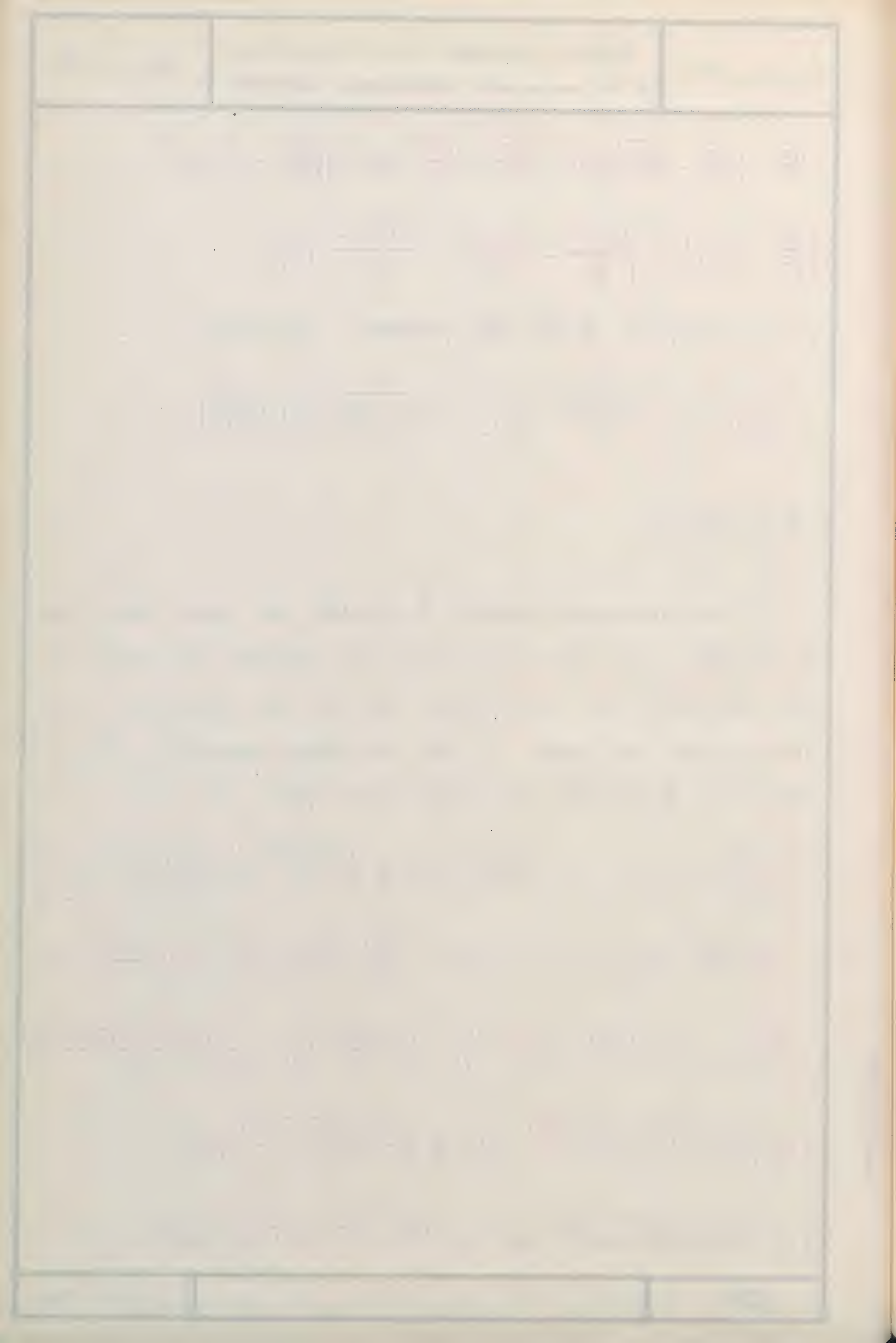
$$\boxed{V_1} = S_1 \times \frac{1}{3}c = \left(\frac{3\sqrt{5} - 5}{5}(a_1)^2\right) \times \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\,(a_1) = \boxed{\frac{2}{15}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,(a_1)^3}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{V_1} = \left[\frac{3\sqrt{5} - 5}{5}(a_1)^2\right] \times \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\,(a_1) =$

$$= \frac{3\sqrt{5} - 5}{5} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\,(a_1)^3 = \frac{3\sqrt{5} - 5}{15}\sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})}{10}}\,(a_1)^3 = \frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(3\sqrt{5} - 5)^2}{10}}\,(a_1)^3 =$$

$$= \frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(45 + 25 - 30\sqrt{5})}{10}}\,(a_1)^3 = \frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(70 - 30\sqrt{5})}{10}}\,(a_1)^3 =$$

$$= \frac{1}{15}\sqrt{(5 + \sqrt{5})(7 - 3\sqrt{5})}\,(a_1)^3 = \frac{1}{15}\sqrt{35 + 7\sqrt{5} - 15\sqrt{5} - 15}\,(a_1)^3 =$$



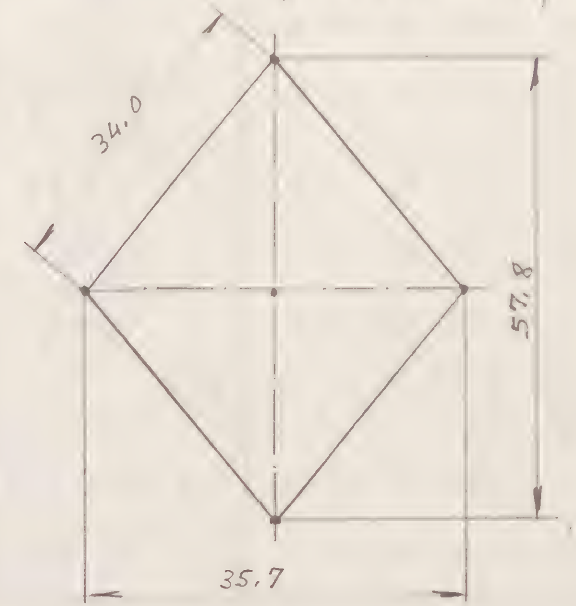
$$= \frac{1}{15}\sqrt{20-8\sqrt{5}}\,(a_1)^3 = \boxed{\frac{2}{15}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,(a_1)^3}$$

Y el volumen V total del poliedro (30 pirámides iguales)

$$V = 30 \times \frac{2}{15}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,(a_1)^3 = 4\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,(a_1)^3$$

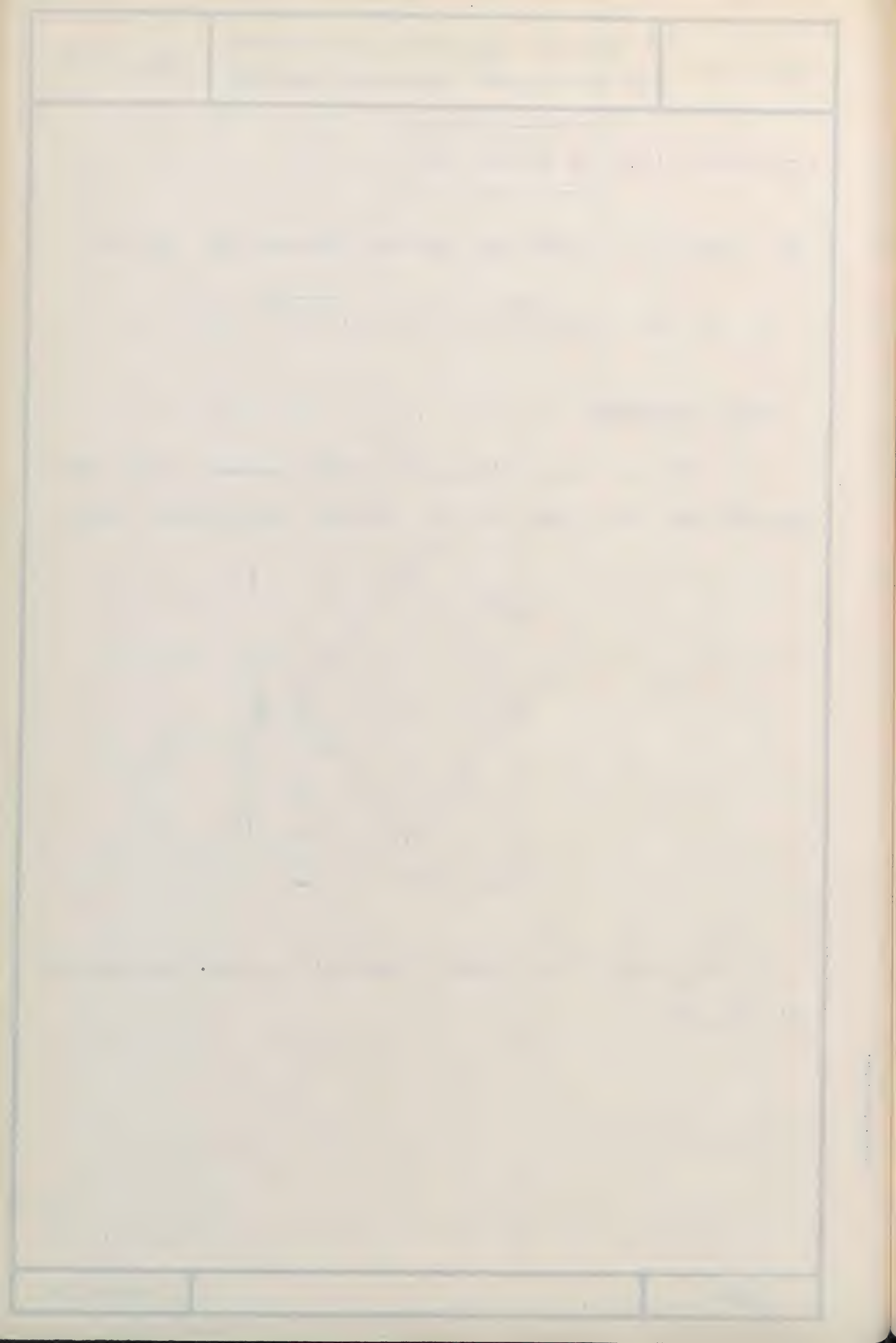
FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 30 rombos, cuyas diagonales son los lados de los poliedros conjugados dados.



La longitud de la arista (34,0 mm) sirve de comprobación al trazado.

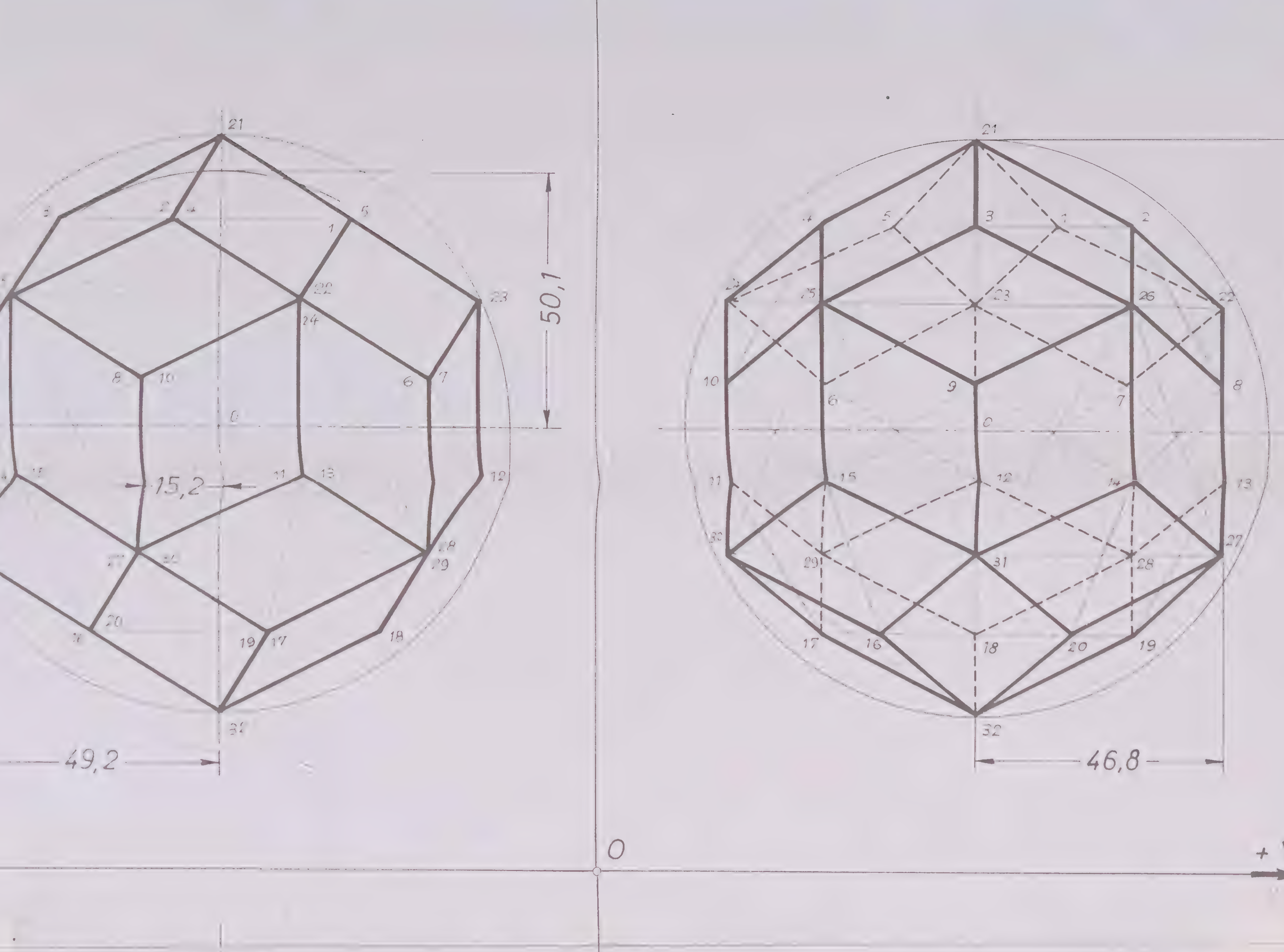
UNE A4 210 X 297



En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados anteriores:

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\ a_1$	0.61 80 34... a_1
a_2	$\sqrt{\frac{3\,(5-\sqrt{5})}{10}}\ a_1$	0.91 05 93... a_1
b	$\frac{2\sqrt{5}}{5}\ a_1$	0.89 44 27.... a_1
c	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ a_1$	0,85 06 51.... a_1
l_{20}	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\ a_1$	1. 05 14 62... a_1
l_{12}	$2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\ a_1$	0.64 98 39... a_1
l_{IV}	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ a_1$	0.52 57 31.... a_1
p	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}}\ a_1$	0.27 63 93.... a_1
2φ	$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$	log. sen φ = $\bar{1}$, 978 20 63 $\varphi = 72^\circ$ $\quad 2\varphi = 144^\circ$
S	$6\,(3\sqrt{5}-5)\ (a_1)^2$	10. 24 92 24.... $(a_1)^2$
V	$4\sqrt{5-2\sqrt{5}}\ (a_1)^3$	2, 90 61 70.. $(a_1)^3$





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un dodecaedro regular y de su icosaedro conjugado por sus aristas cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

El radio de la esfera circunscrita al icosaedro es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

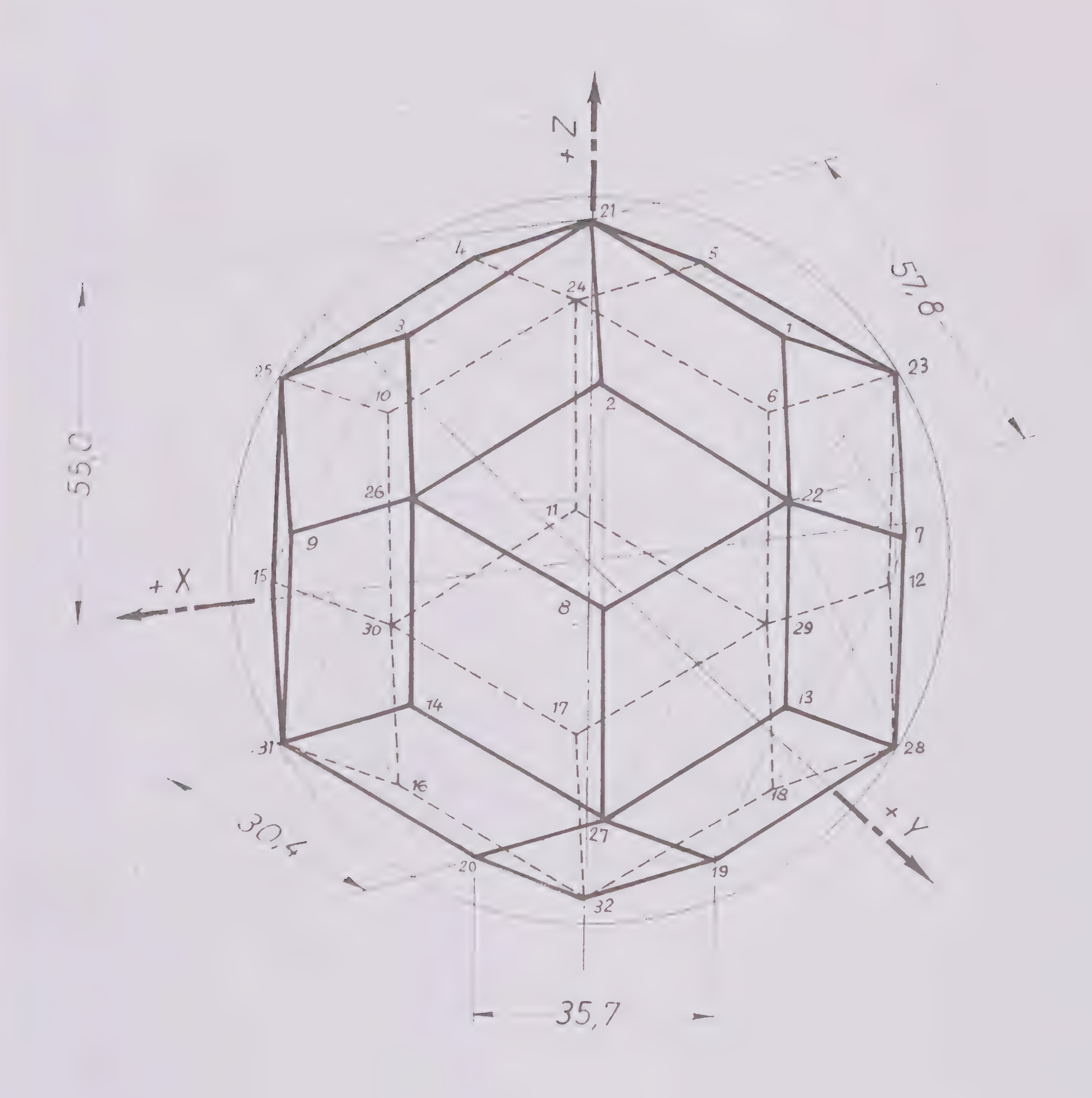
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Dodecaedro conjugado (rojo) ..... 1 al 20
Icosaedro dado (azul) ..... 21 al 32
Poliedro derivado (negro) ..... 1 al 32

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:1	Derivado de los conjugados dodecaedro-icosaedro	Lámina 32 / Curso 19 -19



Derivado de los conjugados dodecaedro-icosaedro

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano I, en el que en cada vértice concurren cuatro triángulos equiláteros y un cuadrado.

La longitud de su lado es de 40.9 mm, y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_I = 40.9 mm.

UNE A4 210 X 297



CONSIDERACIONES PREVIAS

En esta lámina y en las catorce siguientes vamos a realizar el estudio de los denominados "Poliedros arquimedianos" que son aquellos poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares no todos iguales y sus ángulos sólidos son todos iguales o simétricos dos a dos.

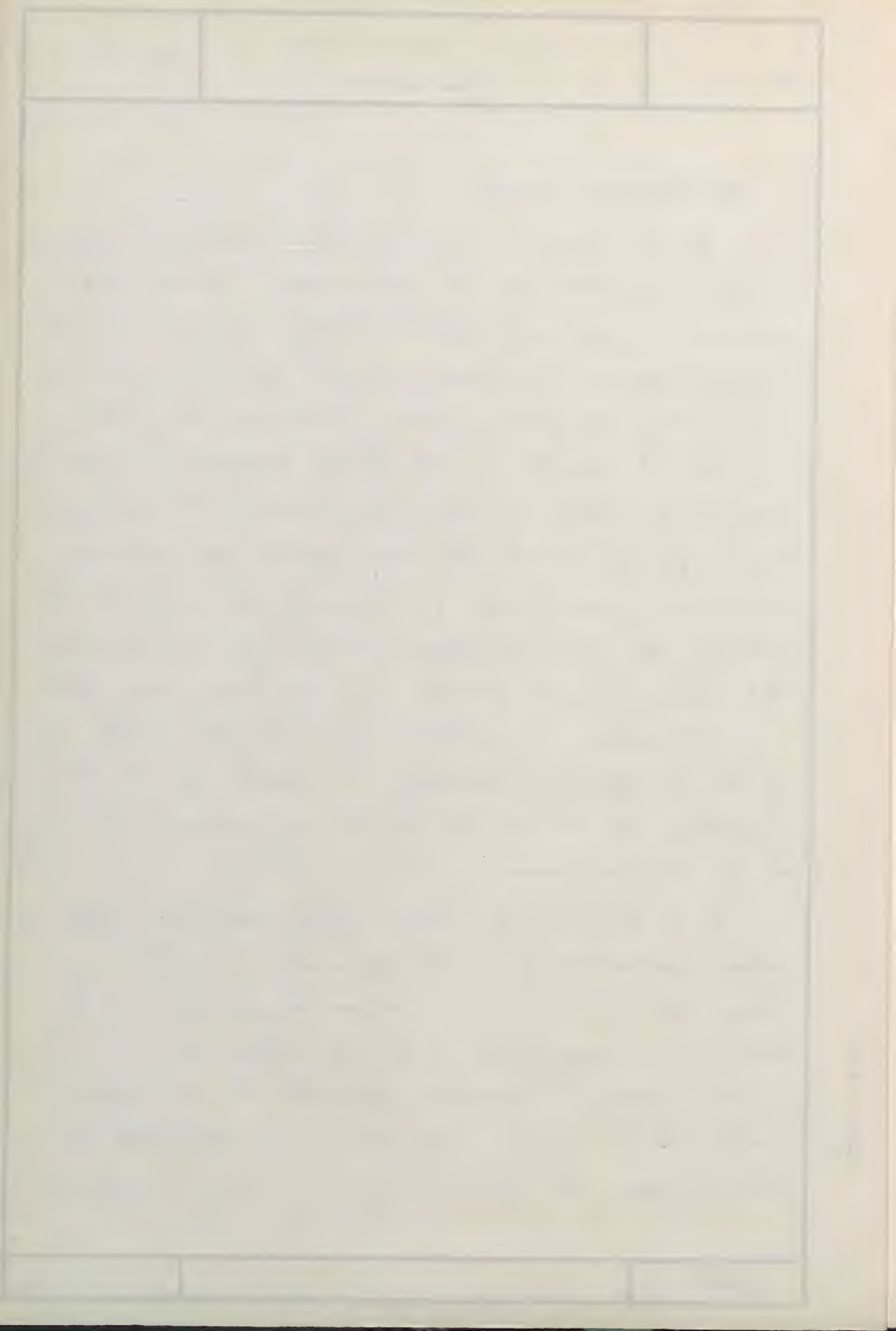
En el desarrollo de este trabajo tendremos siempre en cuenta el estudio general realizado para esto poliedros, en el que se detalla los casos posibles de escistencia, propiedades geométricas y fórmulas generales para la obtención de sus principales magnitudes, en función del lado "l" del poliedro que se toma como dato.

El número de poliedros arquimedianos posibles es el de 13 tipos individuales, a más de dos series infinitas en el que es variable el número "n" de lados de dos de sus caras.

A los primeros los hemos designado con cifras romanas sucesivas y a los segundos "Serie A_n" y "Serie "B_n" siendo "n" un entero mayor de 3 en la primera y mayor de 2 en la segunda.

Las fórmulas generales deducidas en el mencionado estudio y que aplicaremos a cada caso particular, son las siguientes:

UNE A4 210 X 297



$$a = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} \qquad [1]$$

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} \qquad [2]$$

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} \qquad [3]$$

$$\varphi_{pq} = \alpha_p + \beta_q \qquad [4]$$

$$tg\ \alpha_p = \frac{2\,c_p}{\sqrt{4\,(d_p)^2 - \ell^2}} \qquad [5]$$

$$Tg\ \alpha_q = \frac{2\,c_q}{\sqrt{4\,(d_q)^2 - \ell^2}} \qquad [6]$$

en las que:

ℓ = Arista del poliedro arquimediano (dato del problema)

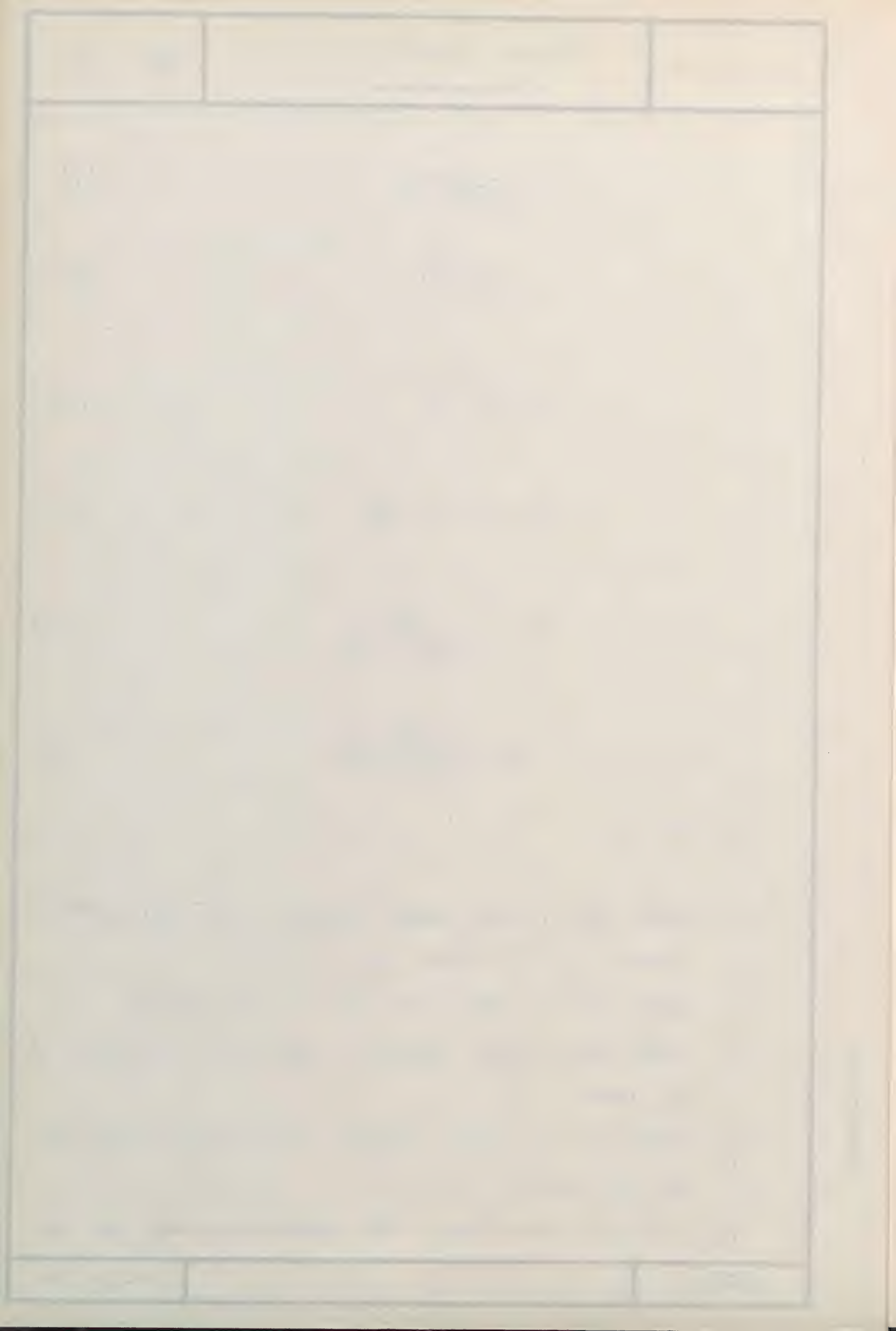
a = Radio de la esfera circunscrita

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_p = Radio de la esfera tangente a las caras regulares de "p" lados

C_q = Radio de la esfera tangente a las caras regulares de "q" lados.

φ_{pq} = Angulo rectilineo del diedro formado por la



cara regular de "p" lados con la de "q" lados.

d_p = Radio de la circunferencia ~~circunferencia~~ circunscrita a una cara de "p" lados.

d_q = Id. id. a una cara de "q" lados.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido

También obtendremos para cada caso particular

S : Superficie

V = Volumen.

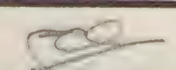
Para la representación de cada arquimediano, nos valdremos principalmente de los valores obtenidos analíticamente por lo cual reduciremos el orden de exposición seguido en las láminas anteriores, limitándonos exclusivamente al "Proceso gráfico-analítico"

PROCESO GRÁFICO- ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que tiene 32 caras regulares triangulares y 6 caras cuadradas; 24 vértices y 60 aristas.

En cada vértice concurren 4 caras triangula-

UNE A4 210 X 297





res, 1 cara cuadrada y, por consiguiente, 5 aristas del mismo.
Así pues, tendremos que

Arquimediano I $(4 P_3 + 1 P_4)$; $C_3 = 32$; $C_4 = 6$; $V = 24$; $A = 60$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cinco aristas de un ángulo poliedro.

Este polígono plano será un pentágono irregular (concurren en el vértice 4 triángulos equiláteros y un cuadrado) formado por cuatro lados iguales y uno desigual.

Los cuatro lados iguales tienen una longitud igual a la arista "l" (tercer lado de cada cara triangular regular) y el quinto tendrá una longitud igual a la diagonal del cuadrado de lado "l," o sea "$\sqrt{2}\, l$".

En la figura 1 se representa este polígono, que



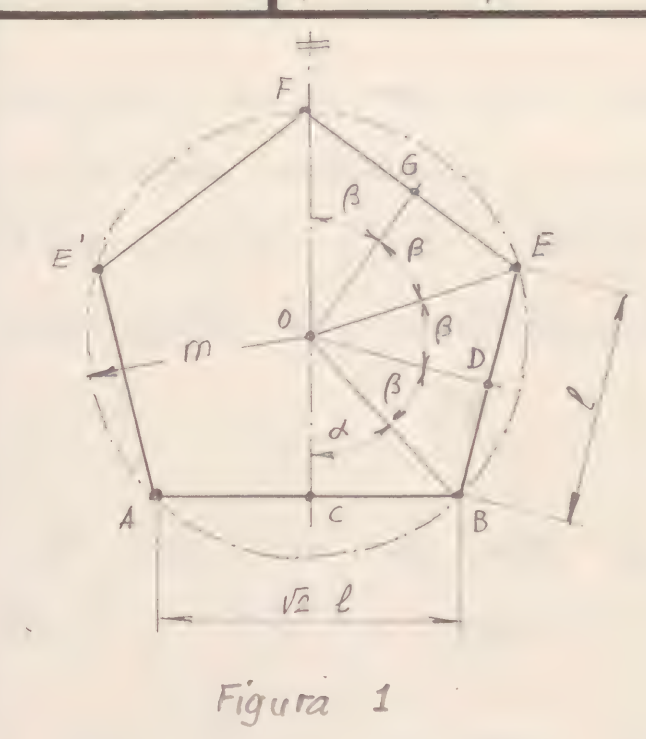


Figura 1

ha de estar inscrito en una circunferencia, cuyo radio "m" queremos determinar.

No existe solución gráfica exacta para este problema.

La solución analítica es la que estudiamos a continuación.

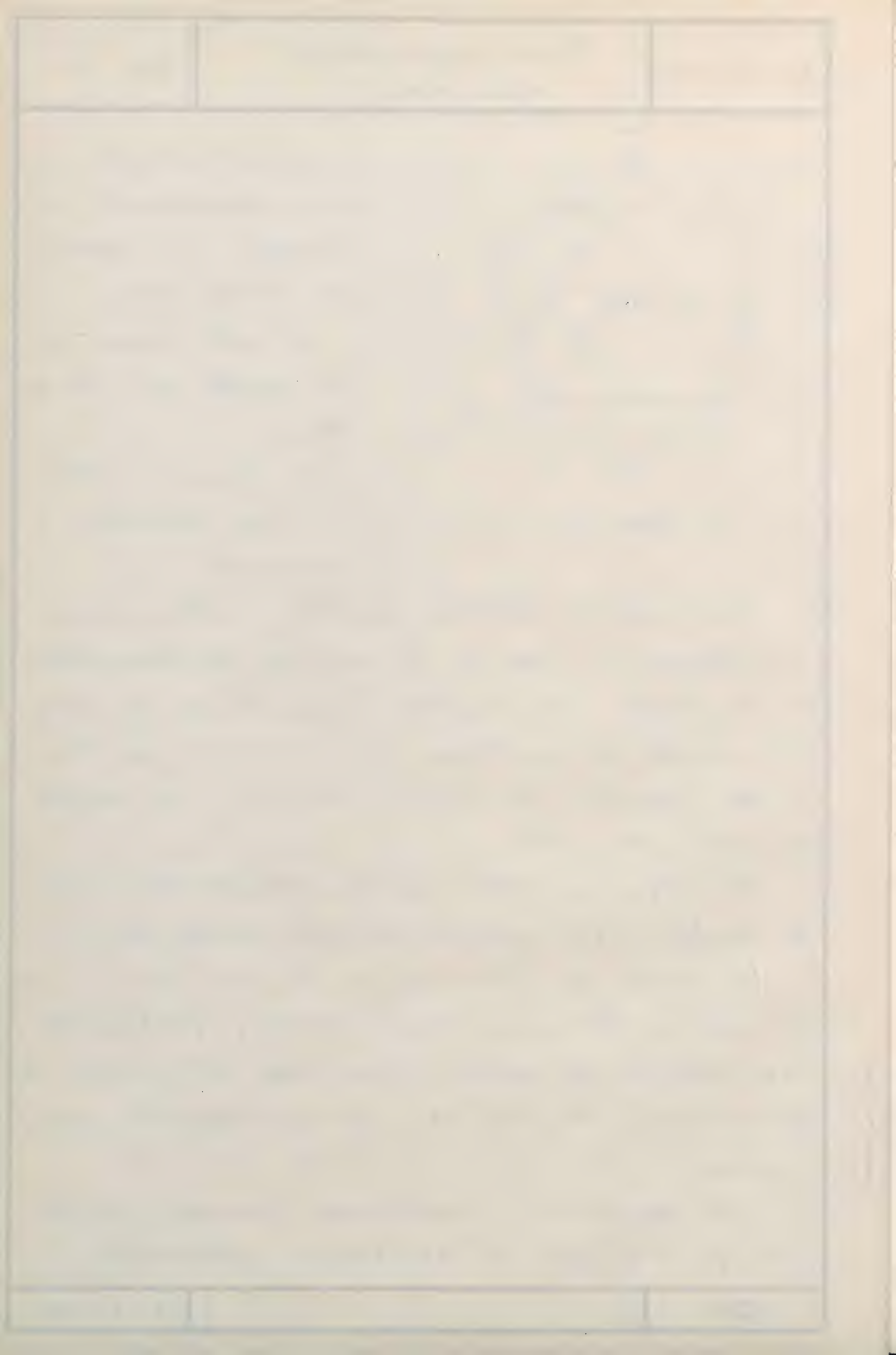
Suponiendo el problema resuelto* y refiriéndonos a la figura 1, sea <u>O</u> el centro de la circunferencia de radio "m" buscado (incógnita), en la cual está inscrito el pentágono A-B-E-F-E' que tiene 4 lados iguales BE = EF = FE' = E'A = l y el quinto desigual AB = √2 l.

De la figura se deduce que el pentágono tiene un eje de simetría F-O-C, mediatriz del lado mayor AB.

Si unimos los vértices B y E con el centro O, se nos formarán los triángulos isósceles B-O-E y E-O-F iguales, cuyas alturas con respecto a sus bases B-E y E-F, nos determinarán los puntos D y G respectivamente, que

---

* La existencia de la circunferencia circunscrita al polígono, que se presupone, la demostraremos posteriormente.



unirémos a su vez con el centro O.

Así pues obtendremos el ángulo $\widehat{C\cdot O\cdot B} = \alpha$ y los $\widehat{B\cdot O\cdot D}$, $\widehat{D\cdot O\cdot E}$, $\widehat{E\cdot O\cdot G}$ y $\widehat{G\cdot O\cdot F}$ todos iguales, que denominaremos β, verificándose que

$$\alpha + 4\beta = 2\pi \qquad (1)$$

El radio "m" buscado se puede obtener en función de "β" y "l", ya que

$$OB = \frac{BD}{\operatorname{sen}\beta} \quad \text{o sea:} \quad m = \frac{l:2}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{l}{2\operatorname{sen}\beta} \qquad (2)$$

Para la determinación de "β" seguiremos el siguiente proceso de acuerdo con la fig. 1:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CB}{OB} = \frac{\frac{\sqrt{2}\,l}{2}}{m} = \frac{\sqrt{2}\,l}{2m} \qquad (3)$$

por otra parte

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{BD}{OB} = \frac{\frac{l}{2}}{m} = \frac{l}{2m} \qquad (4)$$

y dividiendo (3) por (4)

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\sqrt{2}\,l}{2m} : \frac{l}{2m} = \sqrt{2} \qquad (5)$$

Pero siendo el ángulo "α" suplementario del "4β" se verificará que



$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 4\beta \qquad (6)$$

teniendo en cuenta (5) y (6), escribiremos

$$\boxed{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} 4\beta}{\operatorname{sen} \beta} = \boxed{8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta} \qquad (7)$$

ecuación cúbica en "$\cos \beta$" cuya solución nos determinará el valor de "$\cos \beta$", con el cual obtendremos "$\operatorname{sen} \beta$" y finalmente "m" por la ecuación (2)

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{sen} 4\beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} [2 \times (2\beta)]}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{2 \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\beta}{\operatorname{sen} \beta} =$$

$$= \frac{2 \times 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta \times (2 \cos^2 \beta - 1)}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{8 \operatorname{sen} \beta \cos^3 \beta - 4 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} =$$

$$= \boxed{8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta}$$

Para resolver la ecuación cúbica (7), hagamos previamente $\cos \beta = x$, y escribiremos:

$$8x^3 - 4x = \sqrt{2}, \qquad \text{de donde} \quad 8x^3 - 4x - \sqrt{2} = 0$$

y dividiendo por 8, tendremos

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8} = 0 \qquad (8)$$

que se puede transformar en la general



$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 4\beta \qquad (6)$$

teniendo en cuenta (5) y (6), escribiremos

$$\boxed{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} 4\beta}{\operatorname{sen} \beta} = \boxed{8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta} \qquad (7)$$

ecuación cúbica en "$\cos \beta$" cuya solución nos determinará el valor de "$\cos \beta$", con el cual obtendremos "$\operatorname{sen} \beta$" y finalmente "m" por la ecuación (3)

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{sen} 4\beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen}\left[2 \times (2\beta)\right]}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{2 \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\beta}{\operatorname{sen} \beta} =$$

$$= \frac{2 \times 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta \times (2 \cos^2 \beta - 1)}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{8 \operatorname{sen} \beta \cos^3 \beta - 4 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} =$$

$$= \boxed{8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta}$$

Para resolver la ecuación cúbica (7), hagamos previamente $\cos \beta = x$, y escribiremos:

$$8x^3 - 4x = \sqrt{2}, \quad \text{de donde} \quad 8x^3 - 4x - \sqrt{2} = 0$$

y dividiendo por 8, tendremos

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8} = 0 \qquad (8)$$

que se puede transformar en la general



$$z^3 + pz + q = 0$$

haciendo $\quad z = x, \quad p = -\frac{1}{2}, \quad q = -\frac{\sqrt{2}}{8}$

La fórmula de Cardano* nos permite obtener "z" real, siempre que se verifique que

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$$

lo cual sucede en este caso, ya que

$$\boxed{R} = \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{128} - \frac{1}{216} = \boxed{\frac{11}{3456}} > 0$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{R} = \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{2}}{3}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{16}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{2}{16^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{1}{128} - \frac{1}{216} =$$

$$= \frac{2^3 \times 3^3 - 2^7}{2^{10} \times 3^3} = \frac{3^3 - 2^4}{2^7 \times 3^3} = \boxed{\frac{11}{3456}} > 0$$

y por consiguiente:

$$\boxed{z} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right):2 + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right):2 - \sqrt{\frac{11}{3456}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}}} = \boxed{0{,}84\ 25\ 09\ 20\ldots} = \cos\beta \qquad (9)$$

Desarrollo del cálculo anterior:

---

* Ver "Matemáticas para Ingenieros y Técnicos", de R. Doerfling, pag. 58.- Editorial Gustavo Gili, S.A. 1945.



$$z = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right):2 + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right):2 - \sqrt{\frac{11}{3456}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}}}$$

$$\log 2 = 0,301\ 0300$$

$$\frac{\lg 2}{2} = 0,150\ 5150$$

$$-\lg 16 = -1,204\ 1200$$

$$\lg \frac{\sqrt{2}}{16} = \bar{2},946\ 3950$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{16} = 0,08\ 83\ 88\ 35}$$

$$\lg 11 = 1,041\ 3927$$

$$-\lg 3456 = -3,538\ 5737$$

$$\bar{3},502\ 8190 =$$

$$= 1,502\ 8190 - 4$$

$$\lg\sqrt{\frac{11}{3456}} = \frac{1,502\ 8190 - 4}{2} = 0,751\ 4095 - 2 = \bar{2},751\ 4095$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{11}{3456}} = 0,05\ 64\ 16\ 94}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}} = 0,08\ 83\ 88\ 35 + 0,05\ 64\ 16\ 94 = 0,14\ 48\ 05\ 29$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}} = 0,08\ 83\ 88\ 35 - 0,05\ 64\ 16\ 94 = 0,03\ 19\ 71\ 41$$

$$\lg 0,14\ 48\ 05\ 29 = \bar{1},160\ 7845 = 2,160\ 7845 - 3$$

$$\lg 0,03\ 19\ 71\ 41 = \bar{2},504\ 7618 = 1,504\ 7618 - 3$$



$$\lg \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} = \frac{\lg 0{,}14\ 48\ 05\ 29}{3} = \frac{2{,}160\ 7345 - 3}{3} =$$

$$= 0{,}720\ 2615 - 1 = \bar{1}{,}720\ 2615$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} = 0{,}52\ 51\ 23\ 54$$

$$\lg \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}}} = \frac{\lg 0{,}03\ 19\ 71\ 41}{3} = \frac{1{,}504\ 7618 - 3}{3} =$$

$$= 0{,}501\ 5873 - 1 = \bar{1}{,}501\ 5873$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}}} = 0{,}31\ 73\ 85\ 66$$

$$\boxed{\cos\beta} = \begin{array}{r} 0{,}52\ 51\ 23\ 54 \\ +\ 0{,}31\ 73\ 85\ 66 \\ \hline \boxed{0{,}84\ 25\ 09\ 20} \end{array}$$

Los dos valores restantes de la ecuación cúbica (8), son imaginarios.

Del valor $\cos\beta = 0{,}84\ 25\ 09\ 20 \ldots$ se deduce

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - 0{,}84\ 25\ 09\ 20^2} = 0{,}53\ 86\ 81\ 90 \ldots \quad (10)$$

y de éste

$$\beta = 32^\circ\ 35'\ 38{,}2''$$

UNE A4 210 X 297



Comprobación numérica de la raíz real

Vamos a comprobar numéricamente si la raíz real obtenida para la ecuación (8), la verifica. Dicha raíz es

$$x = \cos\beta = 0{,}84\ 25\ 09\ 20\ldots$$

siendo la ecuación: $x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8} = 0$ o sea

$$x^3 - \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{8} = 0{,}17\ 67\ 76\ 70\ldots$$

$$x^2 = 0{,}84\ 25\ 09\ 20^2 = 0{,}70\ 98\ 14\ 00\ 10\ 00\ 00\ 00$$
$$+ \qquad 7\ 75\ 10\ 84\ 64\ 00$$
$$0{,}70\ 98\ 21\ 75\ 20\ 84\ 64\ 00$$

$$x^3 = 0{,}70\ 98\ 21\ 75 \times 0{,}84\ 25\ 09\ 20 =$$

$$= 0{,}59\ 80\ 24\ 82\ 43\ 75\ 00\ 00$$
$$+ \qquad 6\ 53\ 03\ 60\ 10\ 00$$
$$0{,}59\ 80\ 31\ 35\ 47\ 35\ 10\ 00$$

$$x^3 - \frac{1}{2}x = 0{,}59\ 80\ 31\ 35$$
$$-\ 0{,}42\ 12\ 54\ 60$$
$$0{,}17\ 67\ 76\ 75\ldots \cong \frac{\sqrt{2}}{8} = 0{,}17\ 67\ 76\ 70$$

cuyo resultado nos comprueba la exactitud hasta la cifra 10^{-7}.

UNE A4 210 X 297



Comprobado el resultado numérico de $\cos\beta = 0{,}84\ 25\ 07\ 20\ldots$ que nos confirma el de la fórmula (10)

$$\operatorname{sen}\beta = 0{,}53\ 86\ 81\ 90$$

llegaremos al resultado final del valor "m", según la fórmula (2)

$$\boxed{m} = \frac{\ell}{2\operatorname{sen}\beta} = \frac{1}{2 \times 0{,}53\ 86\ 81\ 90}\,\ell = \boxed{0{,}92\ 81\ 91\ 57\ldots\ \ell}$$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Aplicando la fórmula general [1], tendremos:

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - (0{,}92\ 81\ 91\ 57\ldots\ \ell)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - 0{,}92\ 81\ 91\ 57^2}}\,\ell =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{0{,}13\ 84\ 60\ 40\ 93\ 80\ 93\ 51}}\,\ell = \frac{1}{2 \times 0{,}37\ 21\ 02\ 68}\,\ell =$$

$$= \boxed{1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots\ \ell}$$

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Aplicando la fórmula general [3], tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{(1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots\ \ell)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{1{,}34\ 37\ 15\ 13^2 - 0{,}25}\ \ \ell =$$



$\sqrt{1,80\ 55\ 70\ 35\ 05\ 90\ 91\ 69 - 0,25} \times \ell = \sqrt{1,55\ 55\ 70\ 35\ 05\ 90\ 91\ 69} \times \ell =$

$= \boxed{1,24\ 72\ 25\ 06 \ldots\ \ell}$

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular regular de lado "ℓ".

Se demuestra en Geometría es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell}$$

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría es

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell}$$

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2], tendremos:

$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{(1,34\ 37\ 15\ 13 \ldots \ell)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} =$

$= \sqrt{1,34\ 37\ 15\ 13^2 - \frac{1}{3}} \times \ell = \sqrt{1,80\ 55\ 70\ 35\ 05\ 90\ 91\ 69 - \frac{1}{3}} \times \ell =$



$$= \sqrt{1{,}47\ 22\ 37\ 01\ 72\ 57\ 58\ 36} \cdot \ell = \boxed{1{,}21\ 33\ 57\ 74 \ldots\ \ell}$$

Radio "c_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2], tendremos:

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2 - (d_4)^2} = \sqrt{(1{,}34\ 37\ 15\ 13 \ldots \ell)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell\right)^2} =$$

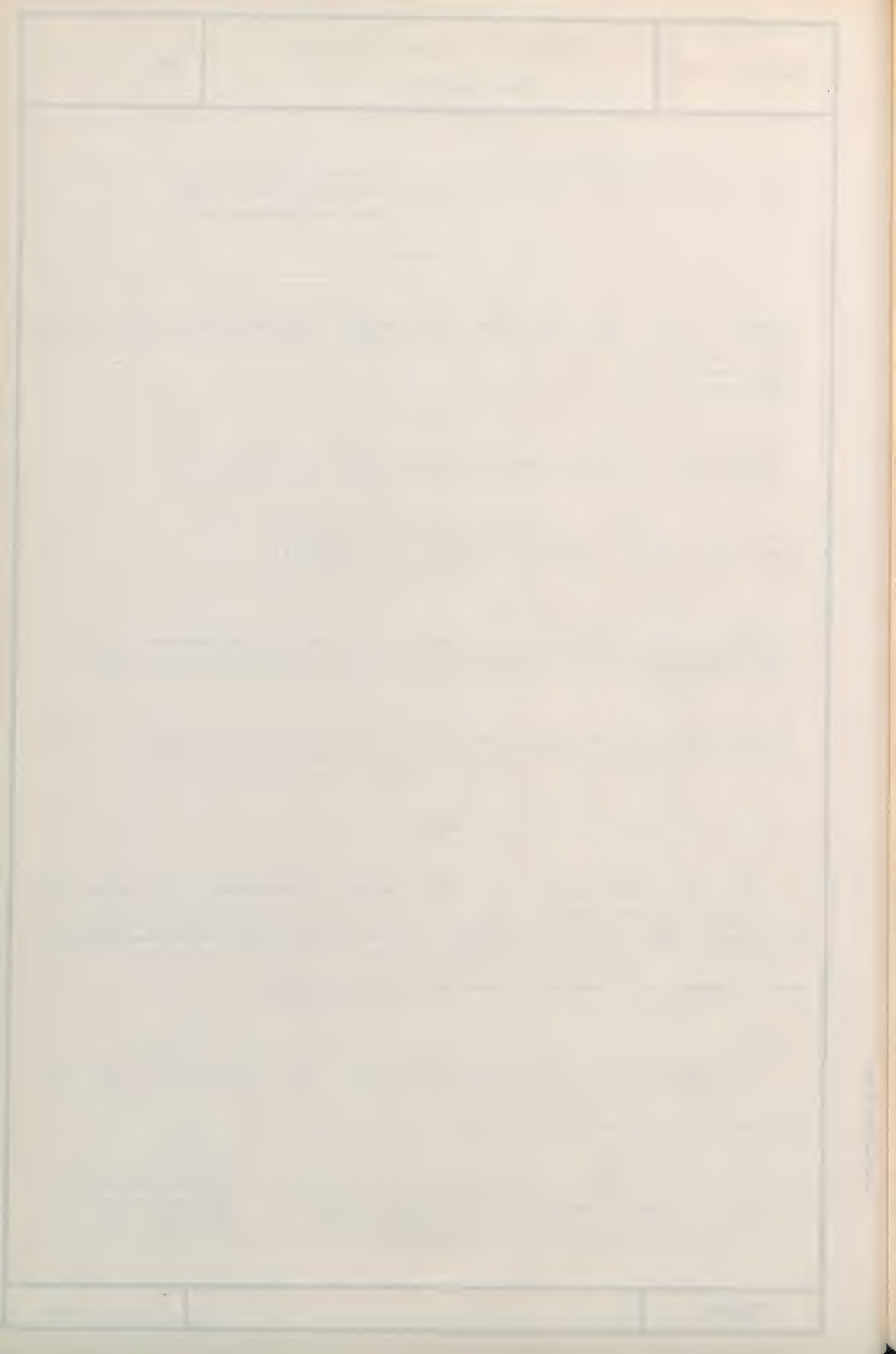
$$= \sqrt{1{,}34\ 37\ 15\ 13^2 - \frac{1}{2}}\ \ell = \sqrt{1{,}80\ 55\ 70\ 35\ 05\ 90\ 91\ 69 - 0{,}5}\ \ell =$$

$$= \sqrt{1{,}30\ 55\ 70\ 35\ 05\ 90\ 91\ 69}\ \ell = \boxed{1{,}14\ 26\ 15\ 57 \ldots\ \ell}$$

Ángulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

Se determina en función de su tangente, por la fórmula general [5]:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times 1{,}21\ 33\ 57\ 74\ \ell}{\sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times 1{,}21\ 33\ 57\ 74}{\sqrt{4 \times \frac{3}{9} - 1}} =$$



$$= \frac{2 \times 1,31\ 33\ 57\ 74}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = 2,42\ 67\ 15\ 43 \times \sqrt{3} = 4,30\ 31\ 94\ 51\ldots$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_3 = 0,623\ 57\ 95$ $\boxed{\alpha_3 = 76°\ 37'\ 2,3''}$

Angulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

Se determina en función de su tangente, por la fórmula general [6]

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{2 c_4}{\sqrt{4 (d_4)^2 - l^2}} = \frac{2 \times 1,14\ 26\ 15\ 57\ldots l}{\sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2 - l^2}} =$$

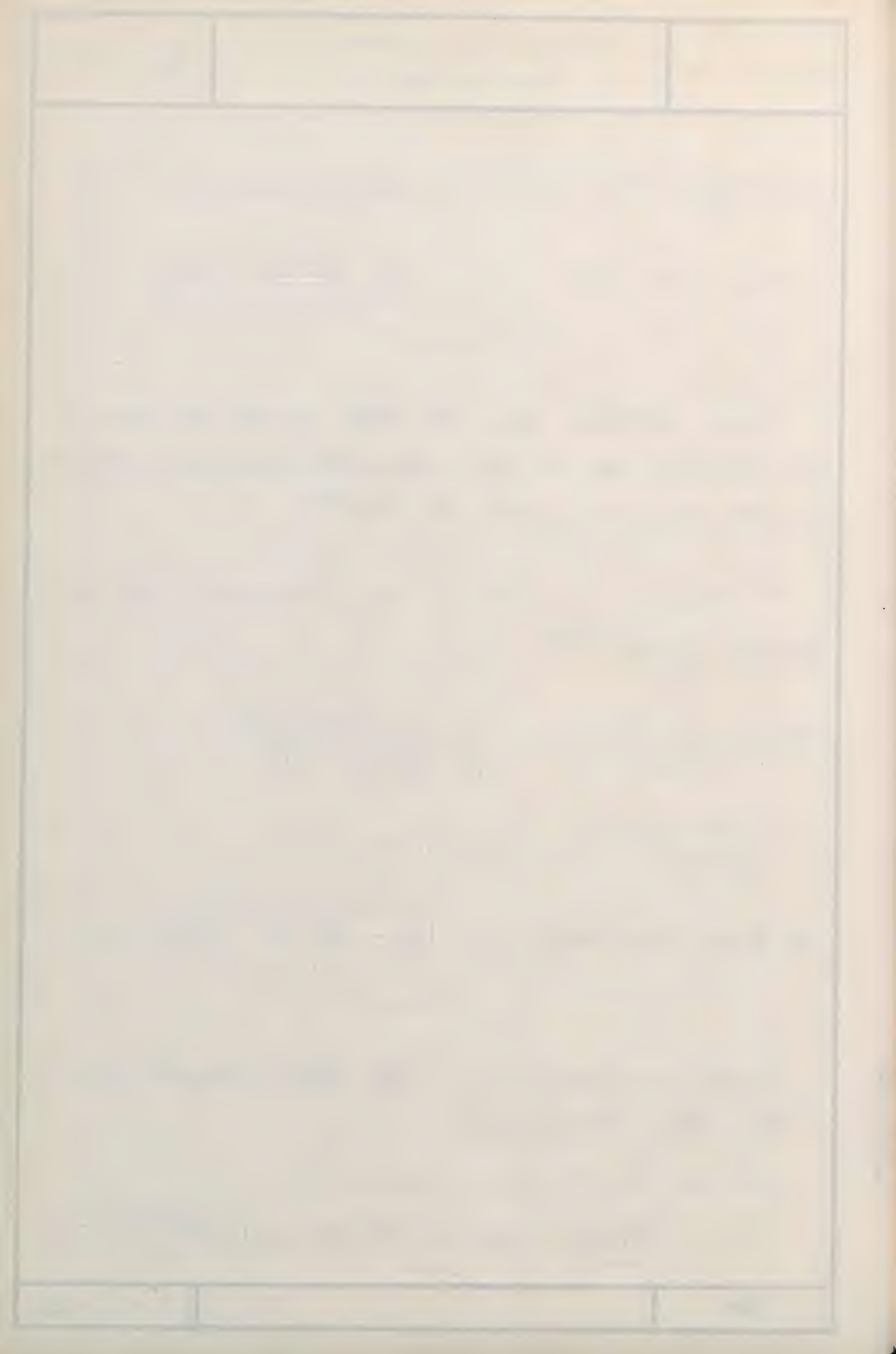
$$= \frac{2 \times 1,14\ 26\ 15\ 57\ldots}{\sqrt{2 - 1}} = 2,28\ 52\ 31\ 14\ldots$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_4 = 0,358\ 9301$ $\boxed{\alpha_4 = 66°\ 21'\ 58,2''}$

Angulo rectilíneo "φ_{3-3}" del diedro formado por dos caras triangulares

Aplicando la fórmula general [4]

$$\boxed{\varphi_{3-3}} = 2\alpha_3 = 2 \times (76°\ 37'\ 2,3'') = \boxed{153°\ 14'\ 4,6''}$$



Ángulo rectilíneo "φ_{3-4}" del diedro formado por una cara triangular y una cuadrada

Aplicando la fórmula general [4]

$$\boxed{\varphi_{3-4}} = \alpha_3 + \alpha_4 = 76^\circ\ 37'\ 2{,}3'' + 66^\circ\ 21'\ 58{,}2''$$

$$= \boxed{142^\circ\ 59'\ 0{,}5''}$$

Área lateral "S" del arquimediano

Se compone de 32 caras triangulares y 6 cuadradas, ambas de lado "ℓ"; la superficie total será:

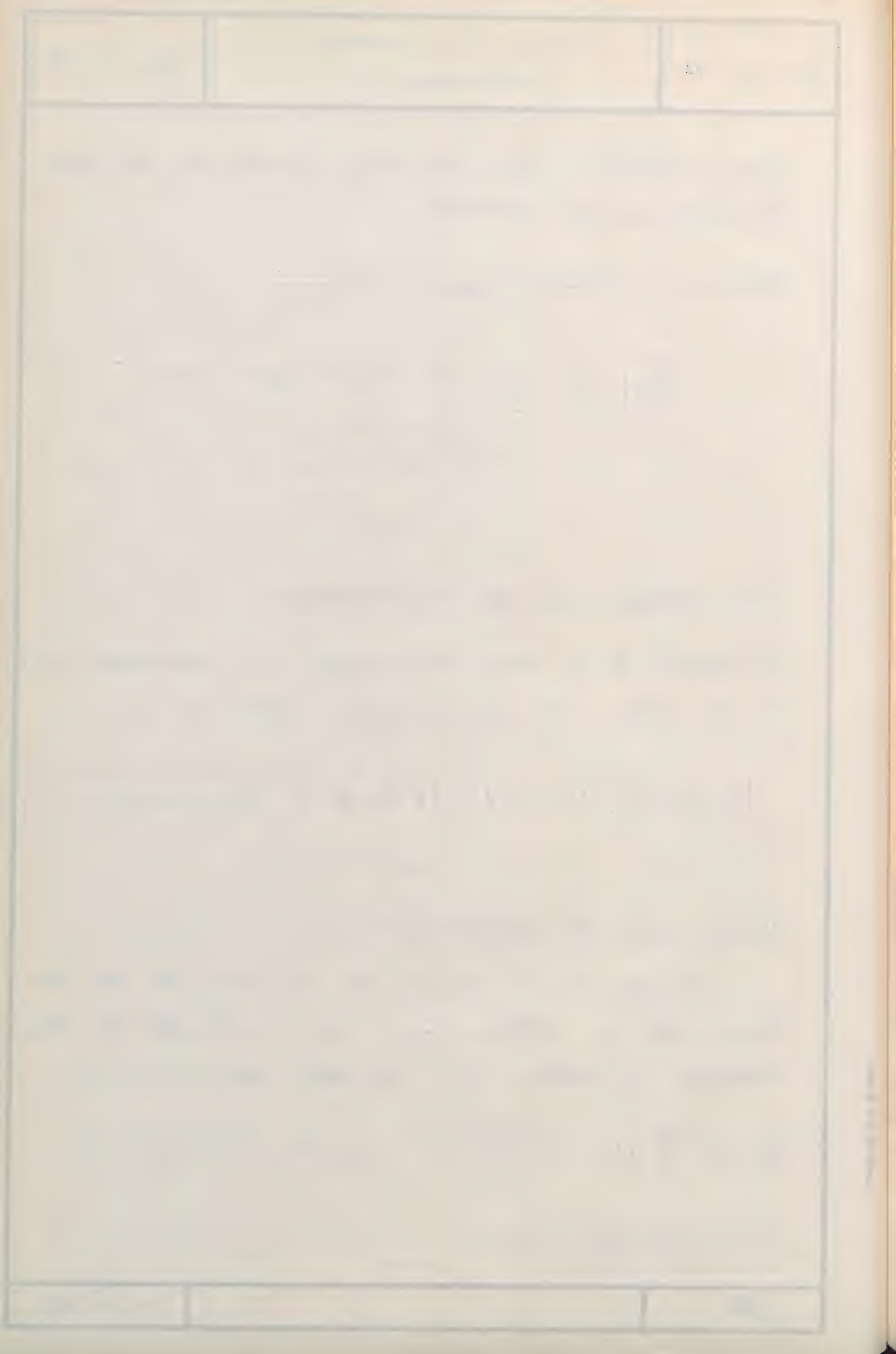
$$\boxed{S} = 32 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\ \ell^2 + 6\ \ell^2 = \left(8\sqrt{3} + 6\right)\ \ell^2 = \boxed{19{,}85\ 64\ 06\ 46 \ldots\ \ell^2}$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 32 pirámides de base triangular y altura c_3, y de 6 pirámides de base cuadrada y altura c_4; su valor será

$$\boxed{V} = 32 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\ \ell^2 \times \frac{1{,}21\ 33\ 57\ 74 \ldots \ell}{3} + 6 \times \ell^2 \times \frac{1{,}14\ 26\ 15\ 57 \ldots \ell}{3} =$$

$$= \boxed{7{,}88\ 94\ 90\ 48 \ldots\ \ell^3}$$



Desarrollo del cálculo anterior:

$$V = \left[\frac{32\sqrt{3}}{4} \times \frac{1,21\ 33\ 57\ 74}{3} + \frac{6}{3} \times 1,14\ 26\ 15\ 57 \right] \ell^3$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{3} = 4,61\ 88\ 02\ 15 \ ;$$

$4,61\ 88\ 02\ 15 \times 1,21\ 33\ 57\ 74 = 5,60\ 42\ 59\ 34$

$+\ 2 \times 1,14\ 26\ 15\ 57$ ——— $= 2,28\ 52\ 31\ 14$

$7,88\ 94\ 90\ 48$



En el cuadro sinóptico que presentamos a continuación, resumimos los resultados anteriores

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}}$	$1.34\ 37\ 15 \ldots\ \ell$
b	$\sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}}$	$1.24\ 72\ 25 \ldots\ \ell$
C_3	$\sqrt{a^2 - (d_3)^2}$	$1,21\ 33\ 58 \ldots\ \ell$
C_4	$\sqrt{a^2 - (d_4)^2}$	$1,14\ 26\ 16 \ldots\ \ell$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	$0.57\ 73\ 50 \ldots\ \ell$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	$0.70\ 71\ 07 \ldots\ \ell$
m	$\frac{1}{2\ \mathrm{sen}\ \beta}\ \ell$	$0.92\ 81\ 92 \ldots\ \ell$
α_3	$\mathrm{tg}\ \alpha_3 = \frac{2C_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - \ell^2}}$	$\mathrm{tg}\ \alpha_3 = 2,42\ 67\ 15$ $\alpha_3 = 76°\ 37'\ 2,3''$
α_4	$\mathrm{tg}.\ \alpha_4 = \frac{2C_4}{\sqrt{4(d_4)^2 - \ell^2}}$	$\mathrm{tg}\ \alpha_4 = 2,28\ 52\ 31$ $\alpha_4 = 66°\ 21'\ 58,2''$
φ_{3-3}	$\alpha_3 + \alpha_3$	$\varphi_{3-3} = 153°\ 14'\ 4,6''$
φ_{3-4}	$\alpha_3 + \beta_4$	$\varphi_{3-4} = 142°\ 59'\ 0,5''$
S	$(8\sqrt{3} + 6)\ \ell^2$	$19,85\ 64\ 06 \ldots\ \ell^2$
V	$\left(32 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{C_3}{3} + 6 \times \frac{C_4}{3}\right)\ell^2$	$7,88\ 94\ 90 \ldots\ \ell^3$
β	$\cos\beta = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}}}$	$\cos\beta = 0,84\ 25\ 09 \ldots$ $\beta = 32°\ 35'\ 38,2''$
	$\mathrm{sen}\ \beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}$	$\mathrm{sen}\ \beta = 0,53\ 86\ 82 \ldots$



Después del cálculo de magnitudes, vamos a proceder a la representación gráfica del arquimediano I, de lado dado.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de proceso gráfico y de cotas complementarias cuyo cálculo justificaremos debidamente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado l_I del arquimediano, de 40,9 mm.

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_I = = 40,9 mm

a = 1,34 37 15 × 40,9 = 55,0 mm

b = 1,24 72 25 × 40,9 = 51,0 mm

c_3 = 1,21 33 58 × 40,9 = 49,7 mm

c_4 = 1,14 25 16 × 40,9 = 46,7 mm

d_4 = 0,70 71 07 × 40,9 = 28,9 mm

El orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 37) es el siguiente:

1º Situar el centro O. de coordenadas 72, 72, 85

2º Dibujar en I, II, y III la esfera circunscrita de radio a = 55 m.

3º Representar en I, II y III la cara cuadrada 1-2-3-4, supuesto el poliedro colocado con dicha cara paralela a II y dos lados (1-4, 2-3) perpendiculares a I.



4º Obtener en I, II y III las proyecciones del vértice 5 de la cara contigua triangular de arista 1-4 (perpendicular a II), por giro alrededor de 1-4 hasta colocar el vértice 5 sobre la esfera circunscrita. Para ello se hace centro en 1_I, con radio igual a la altura de la cara 1-4-5, y se trazará un arco que corte en 5_I a la esfera circunscrita.

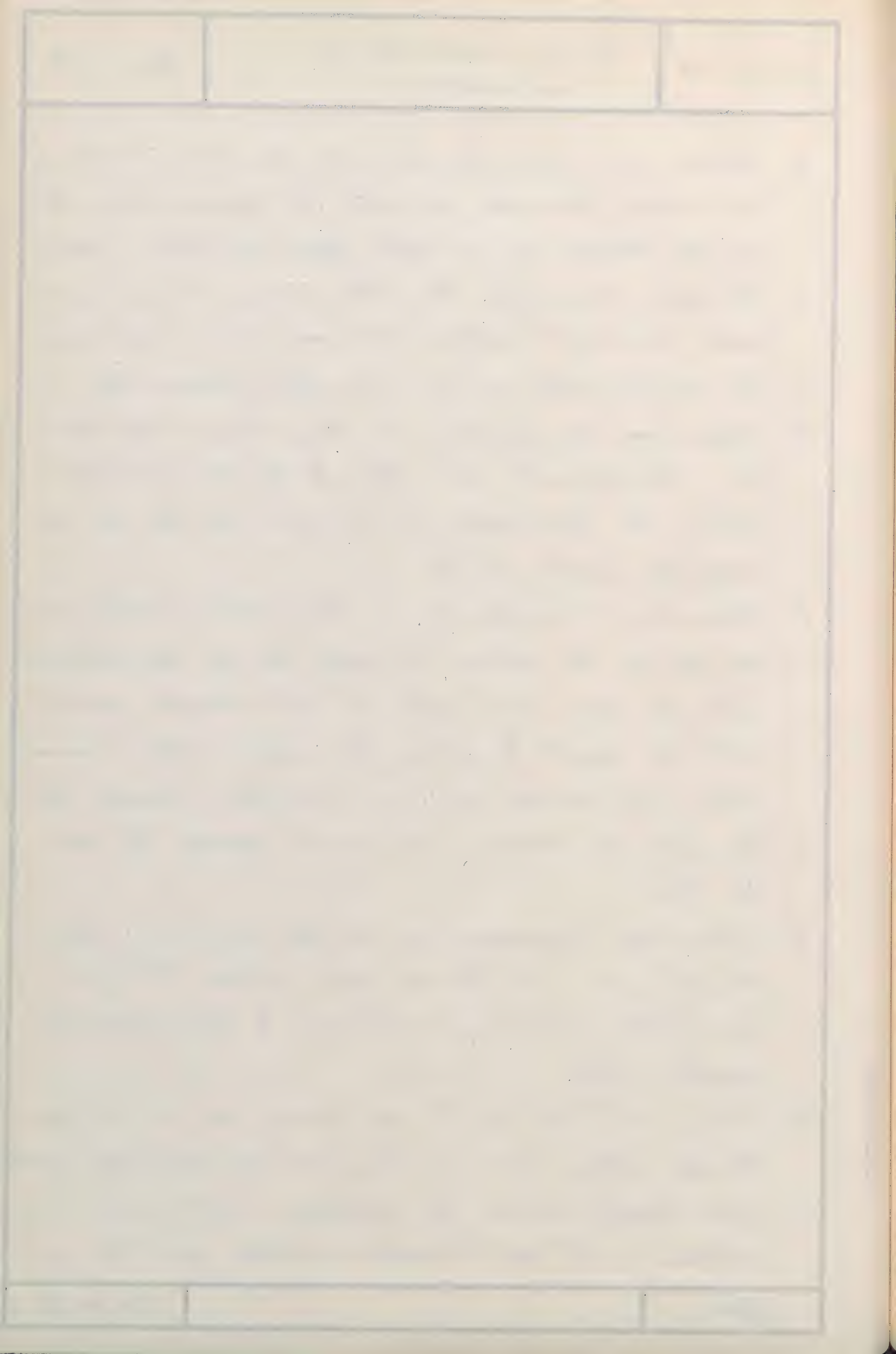
5º Determinar las proyecciones en II y III de dicho vértice 5, y seguidamente en I, II y III las de los vértices 6, 7 y 8. (Los vértices 5, 6, 7, y 8 son los de un cuadrado paralelo al II).

6º Determinar las proyecciones en I y II de la arista 2-11, por giro de la misma alrededor del eje perpendicular a II que pase por el centro O, hasta colocarla paralela a I. (Los puntos 2_I y 11_I están sobre la esfera circunscrita y el segmento 2_I-11_I es la arista. Obsérvese también que la arista 2-11 en la proyección II, pasa por O_{II})

7º Determinar la proyección en III del punto 11, y seguidamente en I, II y III las de los vértices 9, 10, 12. (Los vértices 9, 10, 11 y 12 son los de un cuadrado paralelo a II).

8º Trazar en II el eje "h" que forma con el 5-7 (paralelo este último al X) un ángulo $\varepsilon = 16^\circ 28' 3{,}1''$ ($\operatorname{tg} \varepsilon = 0{,}29\,55\,97$)

9º Los restantes vértices del poliedro 13 al 24 son simétricos en II con respecto a dicho eje "h", por



lo que su situación en II es inmediata. Situando debidamente todos los vértices y estudiando la visibilidad de las aristas correspondientes, podemos representar en II la proyección total del poliedro.

10° Para completar la representación en I y III del poliedro, basta tener en cuenta que los vértices 13 al 16 están situados sobre un plano paralelo al de los vértices 9 al 12 y equidistantes del diametral paralelo a II. Igualmente ocurre con los vértices 17 al 20 con respecto a los 5 al 8, así como los 21 al 24 con respecto a los 1 al 4.

Como comprobación al trazado gráfico dado anteriormente vamos a determinar analíticamente las siguientes cotas complementarias que darán mayor exactitud a dicho trazado.

Altura "h" de una cara triangular

$$\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l} = 0{,}86\ 60\ 25\ldots\ l$$

Para el caso del dibujo será $h = 0{,}86\ 60\ 254 \times 40{,}9 = 35{,}4$ mm.

Distancia "g_1" de los vértices 5 al 8 al plano de la cara cuadrada 1-2-3-4, y de los 17 al 20 a la cara ma-





arista opuesta 26 al 28

Se obtiene proyectando la altura "h" sobre el plano III; el ángulo de proyección es de

$$\varphi_{3-4} - \frac{\pi}{2} = 142^\circ\ 59'\ 0{,}5'' - 90^\circ = 52^\circ\ 59'\ 0{,}5''$$

$$\boxed{g_1} = h \times \cos 52^\circ\ 59'\ 0{,}5'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 52^\circ\ 59'\ 0{,}5'' \times \ell =$$

$$= \boxed{0{,}52\ 13\ 86\ 5 \times \ell}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{1}{2} \log 3 = \frac{1}{2} \times 0{,}477\ 12\ 13 = \text{———} \quad 0{,}238\ 56\ 07$$

$$+ \ \lg. \cos 52^\circ\ 59'\ 0{,}5'' = \text{———} \quad \bar{1}{,}779\ 62\ 92 \ +$$

$$0{,}018\ 18\ 99$$

$$- \ \lg 2 = \text{———} \quad 0{,}301\ 03\ 00 \ -$$

$$\lg \boxed{0{,}52\ 13\ 86\ 5} = \bar{1}{,}717\ 15\ 99$$

Para el caso del dibujo será: $g_1 = 0{,}52\ 13\ 86\ 5 \times 40{,}9 = 21{,}3$ mm.

Distancia "f_1" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 5 al 8, y 17 al 20 respectivamente.

Se obtiene por diferencias de alturas "c_4" y "g_1", ya calculadas,

$$\boxed{f_1} = 2\ (c_4 - g_1) = 2 \times (1{,}\ 14\ 26\ 15\ 6 - 0{,}52\ 13\ 86\ 5) \times \ell =$$



$= \boxed{1,24\,24\,58\,2 \ldots\ l}$

Para el caso particular del dibujo, será: $l_1 = 1,24\,24\,58\,2 \times 40,9 = 50,8$ mm.

<u>Distancia "g_2" de los vértices 9 al 12 al plano de la cara cuadrada 1-2-3-4, y de los 17 al 20 a la cara cuadrada opuesta 20 al 24.</u>

Se obtiene girando previamente la arista 2-11 hasta colocarla paralelamente al plano I, y proyectarla seguidamente sobre el plano III.

Para calcularla, determinemos previamente el ángulo de proyección de dicha arista.

Si consideramos el plano diametral que pasa por 2-11 y el centro O del poliedro, dicho plano pasará a su vez por el centro de la cara cuadrada 1 al 4; uniendo ambos centros tendremos determinado el eje de giro de dicha arista 2-11, el cual será perpendicular a II; los puntos 2 y 11 en II, pasarán a ocupar, después del giro, las posiciones 2_I y 11_I en I, y la arista $2_I - 11_{II}$ estará proyectada en I en su verdadera magnitud.

Uniendo a continuación 2_I y 11_I con el centro O del poliedro, se nos formará el triángulo isósceles $O - 2_I - 11_I$, de base "l", altura "b" y lado "a" (fig. 2)



Figura 2

Este triángulo será contiguo al $0\text{-}A\text{-}2_I$, rectángulo en A, de catetos "c_4", "d_4" e hipotenusa "a".

El ángulo $A\text{-}\widehat{2_I}\text{-}11_I$ es el que forma la arista "l" con el plano de la cara cuadrada 1 al 4, siendo

$$\delta = \widehat{A-2_I-11_I} = \widehat{A-2_I-0} + \widehat{0-2_I-B}$$ se tiene

$$\cos\left(\widehat{A-2_I-0}\right) = \frac{d_4}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,l}{\frac{l^2}{2\sqrt{l^2-m^2}}} = \frac{0{,}70\ 71\ 06\ 78\ldots}{1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots} = 0{,}52\ 62\ 32\ 65\ldots$$

$$\sphericalangle\ A-2_I-0 = 58^\circ\ 14'\ 55{,}5''$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg 0{,}70\ 71\ 06\ 78\ldots = \bar{1},849\ 48\ 50$$
$$-\ \lg 1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots = -0{,}128\ 30\ 72$$
$$\lg \cos\left(\widehat{A-2_I-0}\right) = \bar{1},721\ 17\ 78$$

$$\sphericalangle\ A-2_I-0 = 58^\circ\ 14'\ 55{,}5''$$

y por otra parte

$$\cos\left(0-2_I-B\right) = \frac{\frac{l}{2}}{a} = \frac{l}{2a} = \frac{l}{2\times\frac{l^2}{2\sqrt{l^2-m^2}}} = \frac{1}{2\times 1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots}$$

$$= \frac{1}{2{,}68\ 74\ 30\ 26} = 0{,}37\ 21\ 22\ 68\ldots$$



$\sphericalangle\ 0 \cdot 2_I \cdot B = 68^\circ\ 9'\ 16{,}7''$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg 1 = 0{,}000\ 00\ 00$$

$$\lg 2 = 0{,}301\ 03\ 00$$

$$+ \lg 1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots = 0{,}128\ 30\ 72 \quad = -0{,}429\ 33\ 72$$

$$\lg \cos\left(\widehat{0 \cdot 2_I - B}\right) = \bar{1}{,}570\ 66\ 28$$

$$\sphericalangle\ 0 \cdot 2_I - B = 68^\circ\ 9'\ 16{,}7''$$

y por lo tanto tendremos que:

$$\boxed{\delta} = \sphericalangle\ A - 2_I - 11_I = 58^\circ\ 14'\ 55{,}5'' + 68^\circ\ 9'\ 16{,}7'' =$$

$$= \boxed{126^\circ\ 24'\ 12{,}2''}$$

Si proyectamos la arista $2_I - 11_I$ sobre el plano III, el ángulo de proyección será:

$$126^\circ\ 24'\ 12{,}2'' - 90^\circ = 36^\circ\ 24'\ 12{,}2''$$

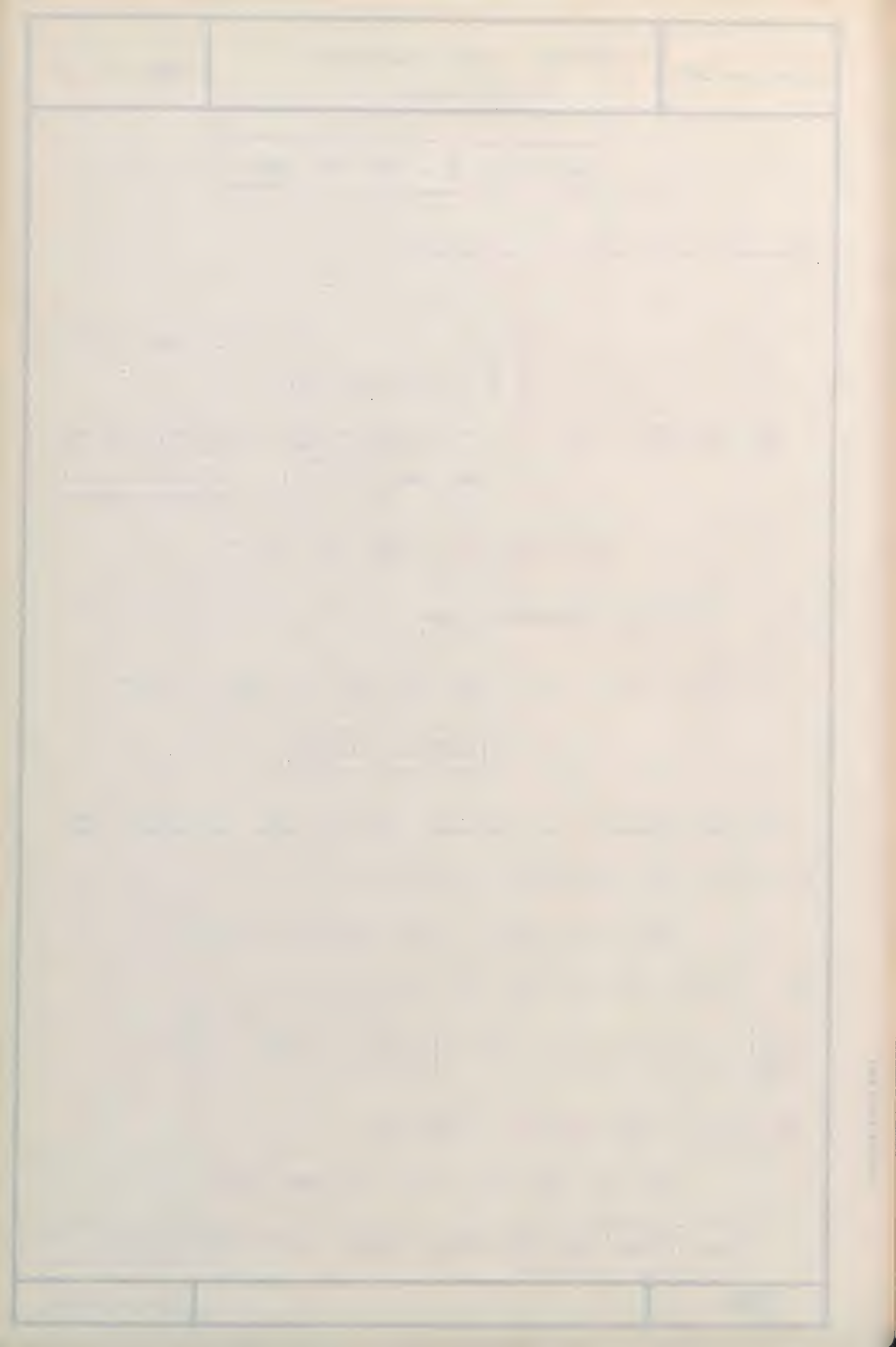
por lo que finalmente tendremos:

$$\boxed{g_2} = \ell \cos 36^\circ\ 24'\ 12{,}2'' = \boxed{0{,}80\ 48\ 58\ 89\ldots\ \ell}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg \cos 36^\circ\ 24'\ 12{,}2'' = \bar{1}{,}905\ 71\ 97$$

$$\boxed{\cos 36^\circ\ 24'\ 12{,}2''} = \text{Antilg } \bar{1}{,}905\ 71\ 97 = \boxed{0{,}80\ 48\ 58\ 89\ldots}$$



Para el caso particular del dibujo, será:

$$j = 0{,}80\ 48\ 58\ 89 \times 40{,}9 = 32{,}9 \text{ mm.}$$

Distancia "f_2" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 9 al 12 y 13 al 16 respectivamente.

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_4" y "j", ya calculadas

$$\boxed{f_2} = 2\ (c_4 - j) = 2 \times (1{,}14\ 30\ 15\ 6... - 0{,}80\ 48\ 58\ 9...)\ \ell =$$

$$= \boxed{0{,}67\ 55\ 13\ 4...\ \ell}$$

Para el caso particular del dibujo, será: $i = 0{,}67\ 55\ 13\ 4 \times 40{,}9 = 27{,}6$ mm

---

Radio "r_1" de la circunferencia circunscrita a los cuadrados de vértices 5 al 8 y 17 al 20.

Está representado en su verdadera magnitud en el plano II, por el segmento 5-0, suma del 5-B y del B-0. Sus valores son:

$$\left.\begin{array}{l} 5\text{-}B = n \times \text{sen } 52°\ 59'\ 0{,}5'' \quad (\text{ver cálculo de } "c_1") \\ B\text{-}0 = \dfrac{\ell}{2} \end{array}\right\} \text{de donde}$$

$$\boxed{r_1} = n \text{ sen } 52°\ 59'\ 0{,}5'' + \frac{\ell}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{sen } 52°\ 59'\ 0{,}5'' + \frac{1}{2}\right) \times \ell =$$

UNE A4 210 X 297



$= \boxed{1,19\ 14\ 88\ 4 \ldots\ l}$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{1}{2}\ \lg 3 = \frac{1}{2} \times 0,477\ 12\ 13 = 0,238\ 56\ 07$$

$$+ \quad \lg \operatorname{sen} 52^\circ\ 59'\ 0,5'' = \bar{1},902\ 25\ 42$$

$$0,140\ 81\ 49$$

$$-\lg 2 \qquad = -0,301\ 03\ 00$$

$$\text{Antilog}\ \ \bar{1},839\ 78\ 49 = 0,69\ 14\ 88\ 4 \ldots$$

$$\boxed{r_1} = (0,69\ 14\ 88\ 4 \ldots + 0,5)\,l = \boxed{1,19\ 14\ 88\ 4 \ldots\ l}$$

Para el caso del dibujo, será: $r_1 = 1,19\ 14\ 88\ 4 \times 40,9 = 48,7$ mm

---

Radio "r_2" de la circunferencia circunscrita a los cuadrados de vértices 9 al 12 y 13 al 16.

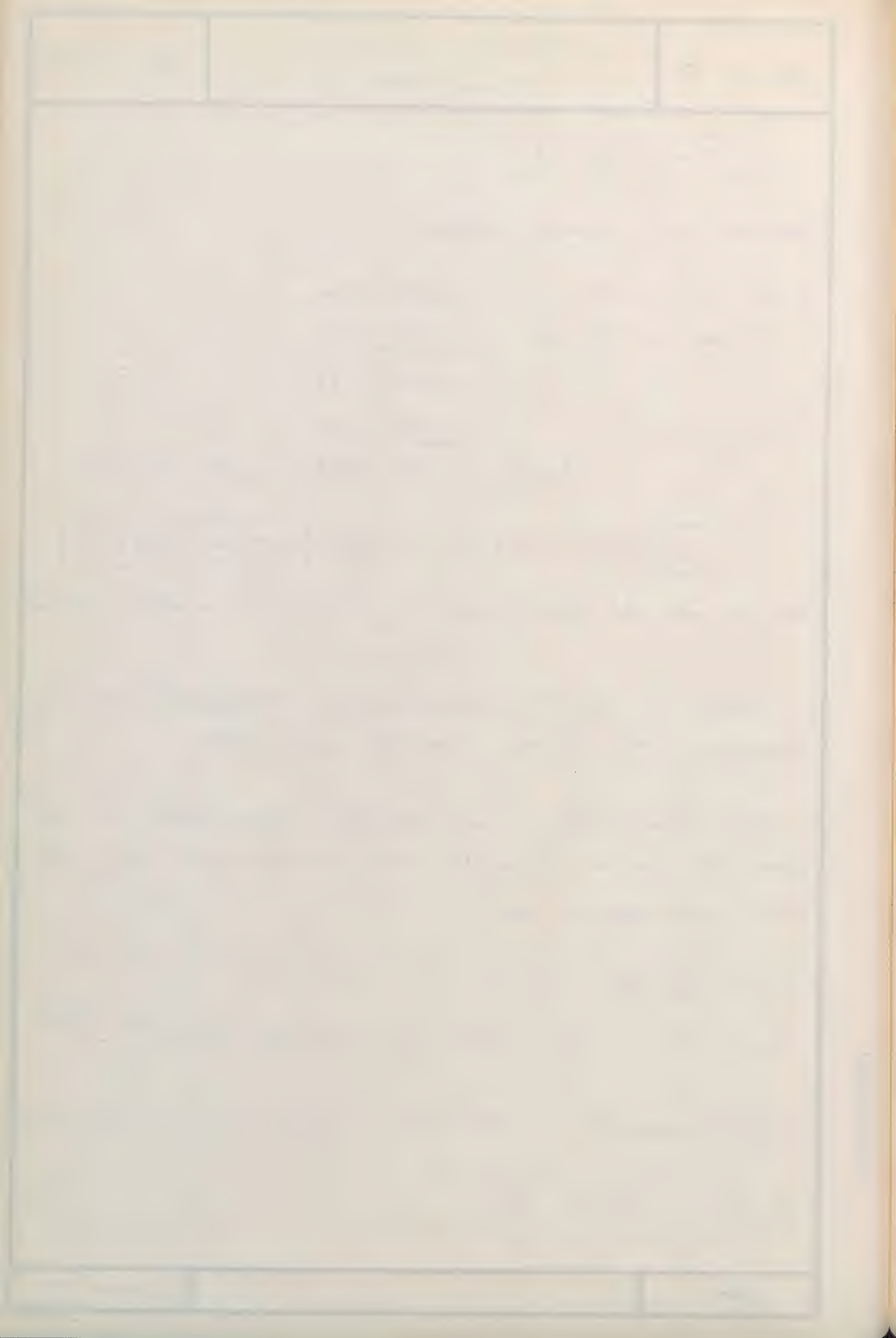
Está representado en su verdadera magnitud, en el plano II, por el segmento 11-0, suma del 0-2 y del 2-11. Sus valores son:

$$0\text{-}2 = d_4 \times l = \frac{\sqrt{2}}{2}\ l$$

$$2\text{-}11 = l \operatorname{sen} 36^\circ\ 24'\ 12,2''$$ (ver cálculo de "j") } de donde

$$\boxed{r_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen} 36^\circ\ 24'\ 12,2''\right) l = (0,70\ 71\ 06\ 8 + 0,59\ 34\ 66\ 4)\,l$$

$= \boxed{1,30\ 05\ 73\ 2 \ldots\ l}$



Desarrollo del cálculo anterior:

$\frac{1}{2}$ lg 2 = $\frac{1}{2}$ × 0,301 03 00 = 0,150 51 50

− lg 2 = = −0,301 03 00

Antilog $\bar{1}$,849 48 50 = 0,70 71 06 8...

lg sen 36° 24′ 12,2″ = $\bar{1}$,77 33 76 2

Antilog $\bar{1}$,77 33 76 2.. = 0,59 34 66 4...

$\boxed{r_2}$ = (0,70 71 06 8... + 0,59 34 66 4...) ℓ = $\boxed{1,30\ 05\ 73\ 2...\ \ell}$

Para el caso del dibujo, será: r_2 = 1,30 05 73 2 × 40,9 = 53,2 mm

---

Ángulo "ε" que forma el eje de simetría "h", en la proyección II, con el eje paralelo a "X"

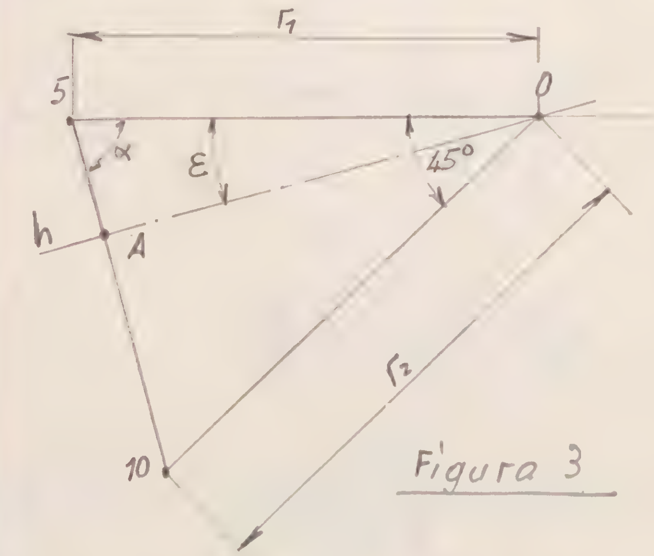


Figura 3

Refiriéndonos a la proyección II, el triángulo 5-0-10 (fig. 3), tiene los valores ya calculados 5-0 = r_1, 10-0 = r_2, y el ángulo que forman estos lados, es de 45°.

La altura OA de este triángulo, correspondiente a "0", es el eje "h" buscado, que forma el ángulo "ε" con el lado 5-0.



En la resolución trigonométrica de triángulos oblicuángulos, cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se obtiene otro de sus ángulos por la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{b - a \cos \gamma}$$

que aplicada al caso particular de la fig. 3, haciendo

$a = r_2$; $b = r_1$; $\gamma = 45^0$ y $\alpha = \widehat{0\text{-}5\text{-}10}$, y

teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

y que $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \varepsilon$, tendremos

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{r_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{r_1 - r_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{r_1}{r_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} - 1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{r_1}{r_2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \frac{r_1}{r_2} - 1}$$ y de aquí:

$$\boxed{\operatorname{tg} \varepsilon} = \sqrt{2} \times \frac{r_1}{r_2} - 1 = \sqrt{2} \times \frac{1{,}19\ 14\ 88\ 4 \ldots l}{1{,}30\ 05\ 73\ 2 \ldots l} - 1 =$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1{,}19\ 14\ 88\ 4}{1{,}30\ 05\ 73\ 2} - 1 = \boxed{0{,}29\ 55\ 97\ 3 \ldots}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\varepsilon = 16^\circ\ 28'\ 3.1''}$$



$\frac{1}{2}$ lg. 2 = $\frac{1}{2}$ × 0, 301 03 00 = 0, 150 51 50

\+ lg. 1. 19 14 88 4 = 0, 076 08 98 +

0, 226 60 48

\- lg. 1, 30. 05 73 2 = 0, 114 13 48 −

Antilog 0, 112 47 00 = 1, 29 55 97 3 ...

$\boxed{tg\ \varepsilon}$ = 1, 29 55 97 3 − 1 = $\boxed{0,29\ 55\ 97\ 3}$

lg tg ε = $\bar{1}$, 470 70 04 $\boxed{\varepsilon = 16^\circ\ 28'\ 3,1''}$

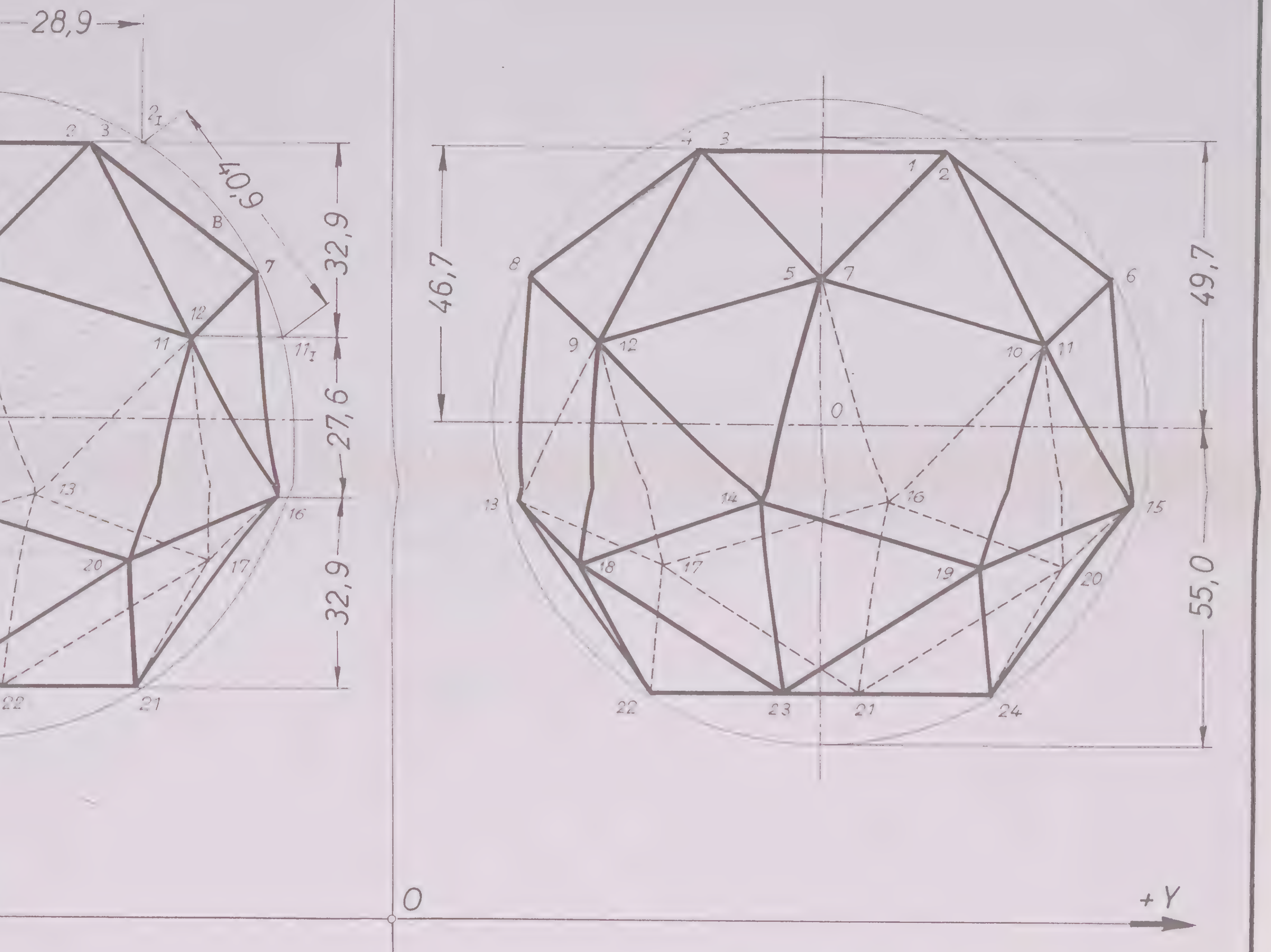
CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell$	0, 86 60 25... ℓ
f_1	$2\ (c_4 - g_1)$	1. 24 24 58... ℓ
g_1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 52^\circ 59' 0.5'' \times \ell$	0. 52 13 87.... ℓ
f_2	$2\ (c_4 - g_2)$	0. 67 55 13 .... ℓ
g_2	$\cos 36^\circ\ 24'\ 12.2'' \times \ell$	0. 80 48 59.... ℓ
r_1	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 52^\circ 59' 0.5'' + \frac{1}{2}\right) \times \ell$	1. 19 14 88 ... ℓ
r_2	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen} 36^\circ 24' 12.2''\right) \cdot \ell$	1. 30 05 73 .... ℓ
ε	$tg\ \varepsilon = \sqrt{2} \times \frac{r_1}{r_2} - 1$	$tg\ \varepsilon$ = 0, 29 55 97 $\varepsilon = 16^\circ\ 28'\ 3,1''$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 32 triángulos equiláteros y 6 cuadrados, de lado 40.9 m m. de forma que en cada vértice concurran 4 triángulos y 1 cuadrado





ARQUIMEDIANO I

Número de caras triangulares	C_3 = 32
Número de caras cuadradas	C_4 = 6
Número de vértices	V = 24
Número de aristas	A = 60
Número de caras de un ángulo sólido:	$4C_3 + 1C_4$

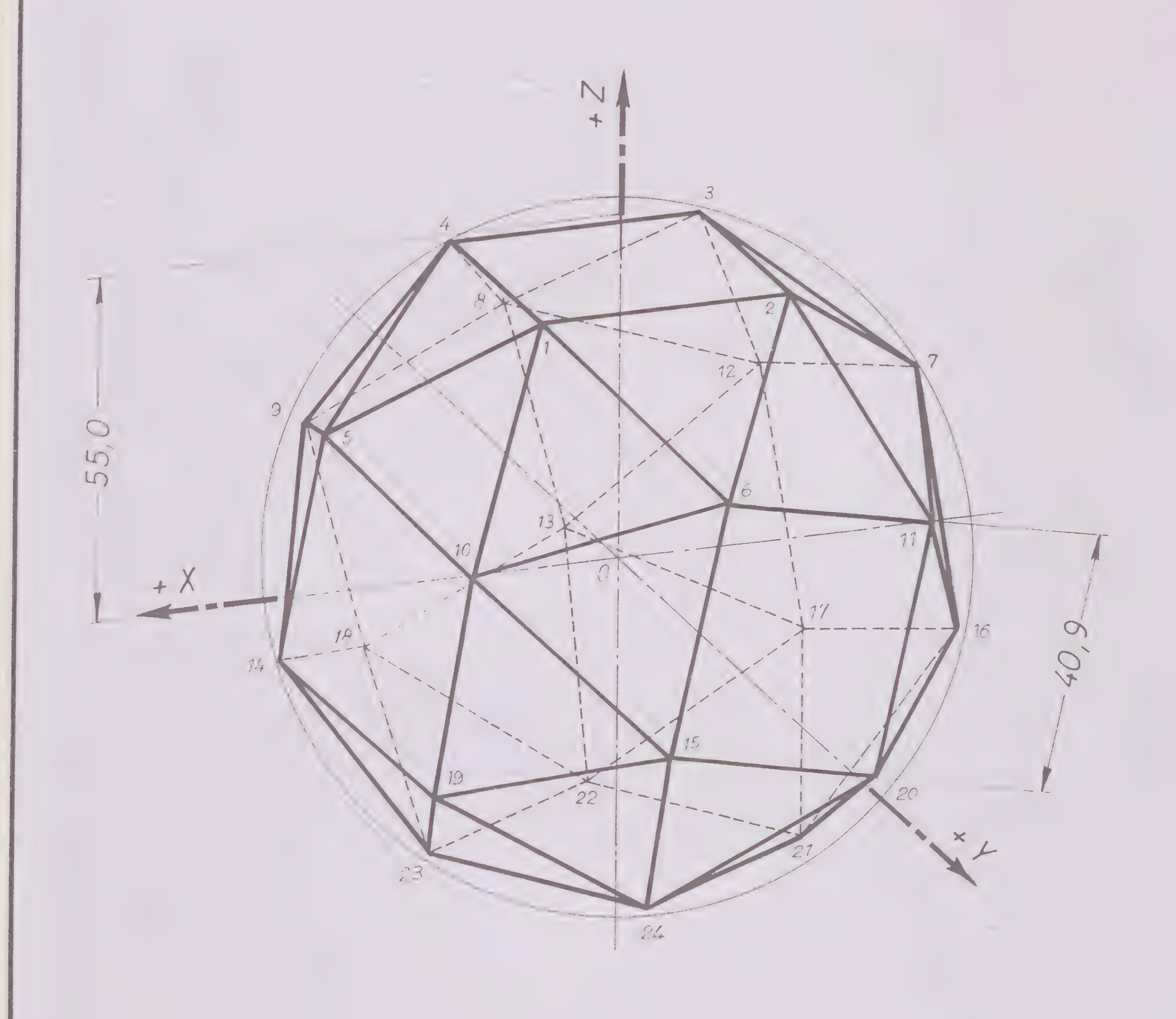
ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano I, en el que en cada vértice concurren cuatro triángulos equiláteros y un cuadrado.

La longitud de su lado es de 40,9 mm, y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1 : 1	Arquimediano I					Lámina 33 — Curso 19 -19



Arquimediano I

Arquimediano II ($4P_3 + 1P_5$)

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano II, en el que en cada vértice concurren cuatro triángulos equiláteros y un pentágono regular.

La longitud de su lado es de 25,5 mm, y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS: O (72, 72, 85) mm

l_{II} = 25,5 mm.

UNE A4 210 X 297

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos, en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes generales siguientes:

l = Arista del Arquimediano II (dato del problema)

a = Radio de la esfera circunscrita

b = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares

c_5 = Radio de la esfera tangente a las caras pentagonales

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular

d_5 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los estremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

α_5 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara pentagonal, con el plano diametral del arqui-



mediano, que pasa por una arista de aquélla.

φ_{3-3} = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras triangulares.

φ_{3-5} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra pentagonal

S = Superficie

V = Volumen.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que tiene 80 caras regulares triangulares y 12 caras regulares pentagonales; 60 vértices y 150 aristas.

En cada vértice concurren 4 caras triangulares, 1 cara pentagonal y, por consiguiente, 5 aristas del mismo.

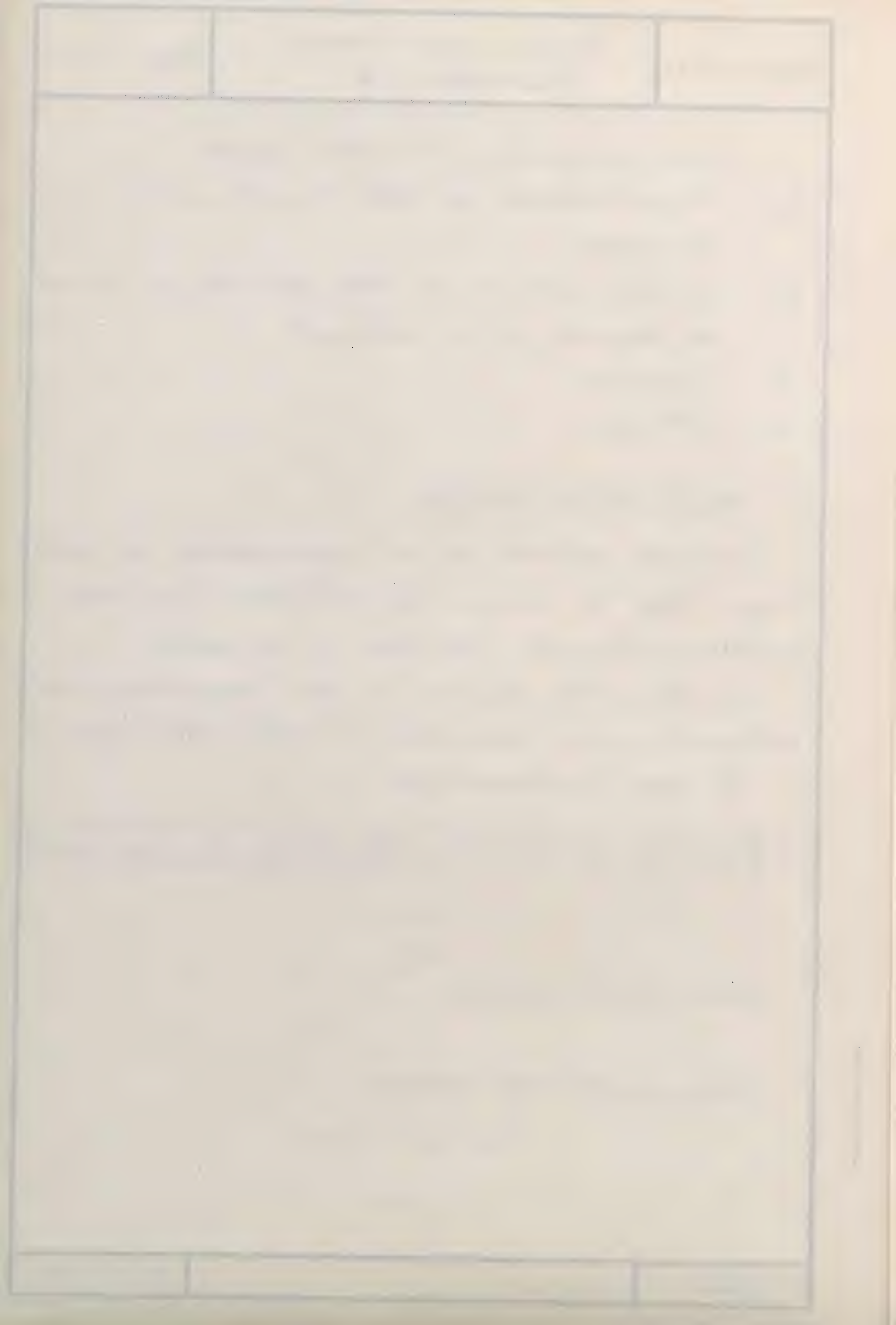
Así pues, tendremos que

Arquimediano II $(4\ P_3 + 1\ P_5)$; $C_3 = 80$; $C_5 = 12$; $V = 60$; $A = 150$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "ℓ" del arquimediano

Dato del ejercicio



<u>Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cinco aristas de un ángulo poliedro.</u>

Este polígono será un pentágono irregular (concurren en el vértice 4 triángulos equiláteros y un pentágono) formado por cuatro lados iguales y uno desigual.

Los cuatro lados iguales tienen una longitud igual a la arista "l" (tercer lado de una cara triangular regular) y el quinto tendrá una longitud igual a la diagonal de un pentágono regular de lado "l".

Su valor será pues:

$$AB = a = l\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

y la relación $\quad \dfrac{a}{l} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Siguiendo el mismo proceso de cálculo desarrollado en la lámina 33 para la determinación de "m" en el Arquimediano I, y refiriéndonos a la misma figura 1, tendremos que

$$m = \frac{l}{2\,\mathrm{sen}\,\beta} \qquad (1)$$

en la que $\mathrm{sen}\,\beta$ se deduce en función de $\cos\beta$, que es a su vez la solución real de la ecuación cúbica

$$8\cos^3\beta - 4\cos\beta = \frac{a}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad (2)$$



para el caso particular que nos ocupa.

Haciendo en (2) $\cos\beta = x$, tendremos

$$8x^3 - 4x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad ,, \quad 8x^3 - 4x - \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 0$$

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}+1}{16} = 0 \qquad (3)$$

que se puede transformar, haciendo $p = -\frac{1}{2}$ y $q = -\frac{\sqrt{5}+1}{16}$, en la general

$$x^3 + px + q = 0$$

La fórmula de Cardano nos permite obtener "x" real, siempre que se verifique que

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$$

lo cual sucede en este caso, ya que

$$\boxed{R} = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{16} : 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} : 3\right)^3 = \frac{3+\sqrt{5}}{512} - \frac{1}{216} = \boxed{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\ 824} > 0}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{R} : \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} : 3\right)^3 = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{32^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{5+1+2\sqrt{5}}{32^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} =$$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{32^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{3+\sqrt{5}}{16 \times 32} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{3+\sqrt{5}}{2^9} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} =$$

$$= \frac{2^3 \times 3^4 + 2^3 \times 3^3 \times \sqrt{5} - 2^9}{2^{12} \times 3^3} = \frac{3^4 + 3^3\sqrt{5} - 2^6}{2^9 \times 3^3} = \boxed{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\ 824} > 0}$$



y por consiguiente:

$$\boxed{z} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right) + \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right) - \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32} + \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32} - \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13.824}}} =$$

$$= 0,56\ 03\ 44\ 87\ldots + 0,29\ 74\ 35\ 82\ldots = \boxed{0,85\ 77\ 80\ 69\ldots} = \cos\beta$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{32} = \frac{3,23\ 60\ 67\ 97\ 74\ 99\ 79}{32} = 0,10\ 11\ 27\ 12\ 42\ 96\ 87$$

$$\frac{17+27\sqrt{5}}{13.824} = \frac{17+60,37\ 38\ 35\ 39\ 24\ 94\ 33}{13.824} = 0,00\ 55\ 97\ 06\ 56\ 38\ 92$$

$$\sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}} = \sqrt{0,00\ 55\ 97\ 06\ 56\ 38\ 92} = 0,07\ 48\ 13\ 54\ldots$$

$$z = \sqrt[3]{0,17\ 59\ 40\ 66} + \sqrt[3]{0,02\ 63\ 13\ 58}$$

$$\lg\ 0.17\ 59\ 40\ 66 = \bar{1},245\ 3662 = 2,245\ 3662 - 3$$

$$\frac{1}{3}\lg\ 0.17\ 59\ 40\ 66 = \frac{1}{3}\cdot(2,245\ 3662 - 3) = 0,748\ 4554 - 1 = \bar{1},748\ 4554$$

$$\sqrt[3]{0,17\ 59\ 40\ 66} = \text{Antilog. } \bar{1},748\ 4554 = 0,56\ 03\ 44\ 87\ldots$$

$$\lg.\ 0,02\ 63\ 13\ 58 = \bar{2},420\ 18\ 00 = 1,420\ 18\ 00 - 3$$

$$\frac{1}{3}\lg\ 0,02\ 63\ 13\ 58 = \frac{1}{3}(1,420\ 18\ 00 - 3) = 0,473\ 3933 - 1 = \bar{1},473\ 3933$$



$$\sqrt[3]{0{,}02\ 63\ 13\ 52} = \text{Antilog. } \bar{1}{,}473\ 3933 = 0{,}29\ 74\ 35\ 82\ldots$$

$$\cos\beta = \boxed{x} = 0{,}56\ 03\ 44\ 87 + 0{,}29\ 74\ 35\ 82 = \boxed{0{,}85\ 77\ 80\ 69\ldots}$$

$$\log\cos\beta = \log 0{,}85\ 77\ 80\ 69 = \bar{1}{,}933\ 37\ 63 \qquad \beta = 30^\circ\ 55'\ 54{,}1''$$

Los dos valores restantes de la ecuación cúbica, son imaginarios.

Del valor $\cos\beta = 0{,}85\ 77\ 80\ 69\ldots$ se deduce

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} 30^\circ\ 55'\ 54.1'' = \sqrt{1 - 0{,}85\ 77\ 80\ 69^2} = 0.51\ 40\ 15\ 84$$

$$\operatorname{sen}\beta = 0.51\ 40\ 15\ 84 \qquad (4)$$

Comprobación numérica de la raíz real

Vamos a comprobar numéricamente si la raíz real obtenida para la ecuación (3), la verifica.

Dicha raíz es

$$x = \cos\beta = 0{,}85\ 77\ 80\ 69$$

siendo la ecuación:

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}-1}{16} = 0$$

UNE A4 210 X 297



$x^2 = 0{,}85\ 77\ 80\ 69^2 = 0{,}73\ 57\ 18\ 49\ 78\ 13\ 00\ 00$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 69\ 31\ 43\ 23\ 87\ 61$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}73\ 57\ 87\ 71\ 31\ 36\ 87\ 61$

$x^3 = 0{,}73\ 57\ 87\ 71 \times 0{,}85\ 77\ 80\ 69 = 0{,}63\ 10\ 85\ 11\ 88\ 67\ 00\ 00$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 59\ 37\ 07\ 10\ 31\ 99$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}63\ 11\ 44\ 48\ 95\ 77\ 31\ 99$

$\frac{1}{2}x = 0{,}85\ 77\ 80\ 69 : 2 = 0{,}42\ 88\ 90\ 35$

$x^3 - \frac{1}{2}x = 0{,}63\ 11\ 44\ 49 - 0{,}42\ 88\ 90\ 35 = 0{,}20\ 22\ 54\ 14 \ldots \cong$

$= \frac{\sqrt{5}+1}{16} = 0{,}20\ 22\ 54\ 25 \ldots$

con un error absoluto de 0,00 00 00 13 (admisible) y cuyo resultado nos comprueba la exactitud hasta la cifra 10^{-7}. (0,20 22 54 2)

De acuerdo con el resultado obtenido en (4) y comprobado, de

$$\operatorname{sen} \beta = 0{,}51\ 40\ 15\ 84$$

obtendremos finalmente:

$$\boxed{m} = \frac{l}{2 \operatorname{sen} \beta} = \frac{1}{2 \times 0{,}51\ 40\ 15\ 84}\,l = \frac{1}{1{,}02\ 80\ 31\ 68}\,l = \boxed{0{,}97\ 27\ 32\ 67 \ldots l}$$



Radio "a" de la esfera circunscrita

Aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33)

$$\boxed{a} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - (0{,}97\ 27\ 32\ 67\ldots\ l)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-(0{,}97\ 27\ 32\ 67\ldots)^2}}\ l =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1 - 0{,}94\ 62\ 08\ 84\ 72\ 85\ 33\ 89}}\ l = \frac{1}{2\sqrt{0{,}05\ 37\ 91\ 15\ 27\ 14\ 67\ 11}}\ l =$$

$$= \frac{1}{2 \times 0{,}23\ 19\ 29\ 20}\ l = \frac{1}{0{,}46\ 38\ 58\ 40}\ l = \boxed{2{,}15\ 58\ 30\ 31\ldots\ l}$$

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{(2{,}15\ 58\ 30\ 31\ldots\ l)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{2{,}15\ 58\ 30\ 31^2 - 0{,}25} \times l =$$

$$= \sqrt{4{,}64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 0{,}25} \times l = \sqrt{4{,}39\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61} \times l =$$

$$= \boxed{2{,}09\ 70\ 46\ 57\ldots\ l}$$

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular regular de lado "l"



Se demuestra en Geometría es

$$d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\, \ell$$

Radio "d_5" de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal regular, de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría es

$$d_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; \ell$$

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$c_3 = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31\ldots \ell)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4,64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - \frac{1}{3}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4,31\ 42\ 70\ 99\ 21\ 81\ 36\ 28} \times \ell = 2,07\ 70\ 82\ 33\ldots\ \ell$$

Radio "c_5" de la esfera tangente a las caras pentagonales regulares de lado "ℓ"



Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_5} = \sqrt{a^2 - (d_5)^2} = \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31\ldots \ell)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31\ldots)^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4,64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 0,72\ 36\ 06\ 79\ 77\ 49\ 97\ 92} \times \ell$$

$$= \sqrt{3,92\ 39\ 97\ 52\ 77\ 64\ 71\ 69} \times \ell = \boxed{1,98\ 09\ 08\ 35\ldots\ \ell}$$

<u>Angulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.</u>

Se determina en función de su tangente por la fórmula general [5] (ver lám. 33):

$$\boxed{tg\ \alpha_3} = \frac{2\ c_3}{\sqrt{4\ (d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times 2,07\ 70\ 82\ 33\ldots \ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{4,15\ 41\ 64\ 66}{\sqrt{4 \times \frac{3}{9} - 1}} =$$

$$= 4,15\ 41\ 64\ 66 \times \sqrt{3} = 7,19\ 52\ 24\ 26\ldots$$

$$lg\ tg\ \alpha_3 = 0,857\ 04\ 44 \qquad \boxed{\alpha_3 = 82^\circ\ 5'\ 15,6''}$$



Angulo rectilíneo "α_5" del diedro formado por una cara pentagonal regular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquella

Se determina en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33)

$$\boxed{tg\ \alpha_5} = \frac{2\,c_5}{\sqrt{4\,(d_5)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times 1,98\ 09\ 08\ 26 \cdot \ell}{\sqrt{4\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\cdot \ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{3,96\ 18\ 16\ 52}{\sqrt{4 \times \frac{5+\sqrt{5}}{10} - 1}} =$$

$$= \frac{3,96\ 18\ 16\ 52}{1,37\ 63\ 81\ 92} = 2,87\ 84\ 28\ 19 \ldots$$

$lg\ tg\ \alpha_5 = 0,45\ 91\ 554$ $\qquad \boxed{\alpha_5 = 70°\ 50'\ 31,8''}$

Angulo rectilíneo "φ_{3-3}" del diedro formado por dos caras triangulares.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{3-3}} = 2\,\alpha_3 = 2 \times (82°\ 5'\ 15,6'') = \boxed{164°\ 10'\ 31,2''}$$

Angulo rectilíneo "φ_{3-5}" del diedro formado por una cara triangular y una pentagonal


UNE A4 210 x 297

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 21)

$$\boxed{\varphi_{3-5}} = \alpha_3 + \alpha_5 = 82^\circ\ 5'\ 15{,}6'' + 70^\circ\ 50'\ 31{,}8'' =$$

$$= \boxed{152^\circ\ 55'\ 47{,}4''}$$

Área lateral "S" del arquimediano

Se compone de 80 caras triangulares y 12 pentagonales, regulares y de lado "ℓ"; la superficie total será:

$$\boxed{S} = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 + 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\ell^2 = \left[20\sqrt{3} + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right]\times \ell^2 =$$

$$= \left[34{,}64\ 10\ 16\ 2 + 20{,}64\ 57\ 28\ 8\right]\times \ell^2 = \boxed{55{,}\ 28\ 67\ 45\ 0\ldots\ \ell^2}$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 80 pirámides de base triangular y altura "c_3" y de 12 pirámides de base pentagonal regular y altura "c_5"; su valor será:

$$\boxed{V} = \left[80 \times \frac{\sqrt{2}}{4}\ell^2 \times \frac{c_3}{3} + 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\ell^2 \times \frac{c_5}{3}\right] =$$

$$= \left[34{,}64\ 10\ 16\ 2 \times \frac{2{,}07\ 70\ 82\ 3}{3} + 20{,}64\ 57\ 28\ 8 \times \frac{1{,}98\ 09\ 08\ 3}{3}\right]\times \ell^3 =$$


UNE A4 210 X 297

$$= \left[23{,}\ 98\ 40\ 80\ 5 + 13{,}\ 63\ 24\ 31\ 8 \right] \times \ell^3 = \boxed{37{,}\ 61\ 65\ 12\ 3\ldots\ \ell^3}$$

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\dfrac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}}$	$2{,}\ 15\ 58\ 30\ldots\ \ell$
b	$\sqrt{a^2 - \dfrac{\ell^2}{4}}$	$2{,}\ 09\ 70\ 47\ldots\ \ell$
c_3	$\sqrt{a^2 - (d_3)^2}$	$2{,}\ 07\ 70\ 82\ldots\ \ell$
c_5	$\sqrt{a^2 - (d_5)^2}$	$1{,}\ 98\ 09\ 08\ldots\ \ell$
d_3	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	$0{,}\ 57\ 73\ 50\ldots\ \ell$
d_5	$\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$0{,}\ 85\ 06\ 51\ldots\ \ell$
m	$\dfrac{1}{2\ \mathrm{sen}\ \beta}\ \ell$	$0{,}\ 92\ 27\ 33\ldots\ \ell$
α_3	$\mathrm{tg}\ \alpha_3 = \dfrac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - \ell^2}}$	$\mathrm{tg}\ \alpha_3 = 7{,}\ 19\ 52\ 24\ldots$ $\alpha_3 = 82^\circ\ 5'\ 15{,}6''$
α_5	$\mathrm{tg}\ \alpha_5 = \dfrac{2c_3}{\sqrt{4(d_5)^2 - \ell^2}}$	$\mathrm{tg}\ \alpha_5 = 2{,}\ 87\ 84\ 28\ldots$ $\alpha_5 = 70^\circ\ 50'\ 31{,}8''$
φ_{3-3}	$\alpha_3 + \alpha_3$	$\varphi_{3-3} = 164^\circ\ 10'\ 31{,}2''$
φ_{3-5}	$\alpha_3 + \alpha_5$	$\varphi_{3-5} = 152^\circ\ 55'\ 47{,}4''$
S	$\left[20\sqrt{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\right] \times \ell^2$	$55{,}\ 28\ 67\ 45\ldots\ \ell^2$
V	$\left[20\sqrt{3} \times \dfrac{c_3}{3} + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \dfrac{c_5}{3}\right] \times \ell^2$	$37{,}\ 61\ 65\ 12\ldots\ \ell^3$
β	$\cos\beta = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}+1}{32} + \sqrt{\dfrac{17+27\sqrt{5}}{13\ 824}}} + \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}+1}{32} - \sqrt{\dfrac{17+27\sqrt{5}}{13\ 824}}}$	$\cos\beta = 0{,}\ 85\ 77\ 80\ 69\ldots$ $\beta = 30^\circ\ 55'\ 54{,}1''$
	$\mathrm{sen}\ \beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}$	$\mathrm{sen}\ \beta = 0{,}51\ 40\ 15\ 84\ldots$


UNE A4 210 X 297

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder a la representación gráfica del Arquimediano II, de lado dado, en la lámina nº 341

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementarias cuyo cálculo estudiaremos posteriormente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado "l_{II}" del arquimediano, de 25,5 mm [illegible]

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{II}	=			=	25,5	mm
a	=	2,15 58 30	× 25,5	=	55,0	mm
b	=	2,09 70 47	× 25,5	=	53,5	mm
C_3	=	2,07 70 82	× 25,5	=	53,0	mm
C_5	=	1,98 09 08	× 25,5	=	50,5	mm
d_3	=	0,57 53 50	× 25,5	=	14,7	mm
d_5	=	0,85 06 51	× 25,5	=	21,7	mm

El orden de operaciones del trazado gráfico (lam. 34) es el siguiente:

1º Situar el centro O, de coordenadas 72, 72, 85 mm

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio $a = 55$ mm.

3º Representar en I, II y III la cara pentagonal


UNE A4 210 X 297

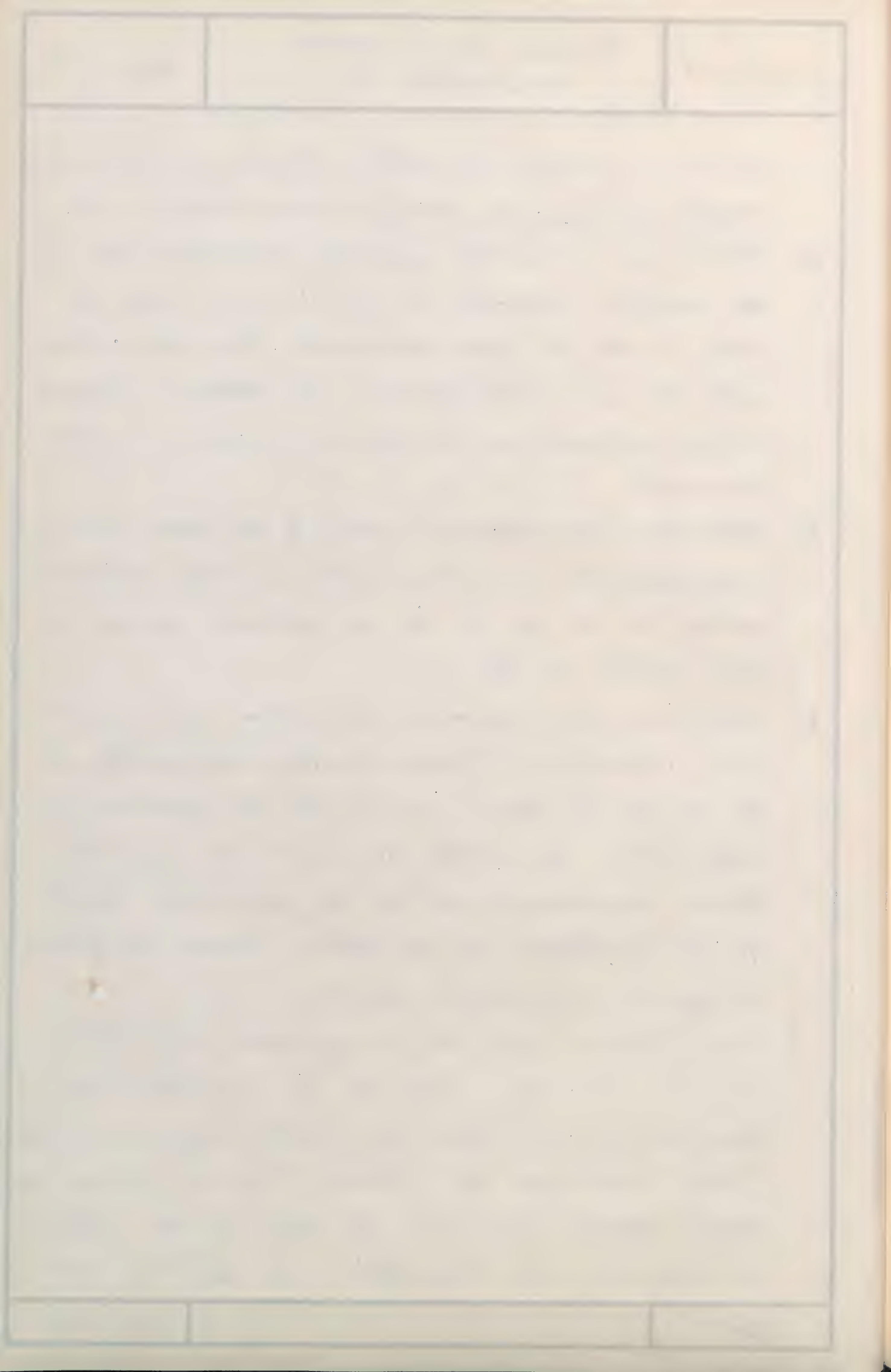
1-2-3-4-5, supuesto el poliedro colocado con dicha cara paralela a II y un lado (1-5) perpendicular a I. (utilícese la cota "c_5" en I y III).

4º Obtener en I, II y III las proyecciones del vértice 6 de la cara contigua triangular de arista 1-5 hasta colocar el vértice 6 sobre la esfera circunscrita. Para ello se hará centro en 1_I con radio igual a la altura de la cara 1-5-6 y se trazará un arco que corte en 6_I a la esfera circunscrita

5º Determinar las proyecciones en I y III de dicho vértice 6, y seguidamente en I, II y III de los vértices 7 al 10 (los vértices 6 al 10 son los de un pentágono regular de plano paralelo al II).

6º Determinar en I la posición del vértice 14 (la arista 3-14 es paralela a I) sobre la esfera circunscrita, lo que nos permite obtener en II y III las proyecciones de dicho vértice. Los vértices 11, 12, 13 y 15 se pueden obtener seguidamente en sus tres proyecciones, puesto que el pentágono que se obtiene al unir los 11 al 15 es regular y su plano paralelo a II.

7º Para la obtención gráfica de las proyecciones de los vértices 16 al 20, 21 al 25 y 26 al 30, que nos faltan para conseguir la representación de la mitad superior de este poliedro, tendríamos que efectuar el giro de las caras contiguas alrededor de aristas ya determinadas. Estos giros presentan cierta dificultad al ser todas las aristas



del contorno poligonal ya obtenido (ver 6-12-7-13-8-14-9-15-10-11-6 en planos I y II) oblicuas a I y II, lo cual nos obliga a cambios de plano para conseguir la perpendicular, de la arista tomada como eje de giro, a uno de los planos de proyección. Se simplifica este proceso si previamente conocemos las distancias de dichos puntos al plano paralelo a II que pasa por O. Dichas distancias pueden obtenerse analíticamente, teniendo en cuenta que los vértices 16 al 20 son a su vez vértices de un pentágono regular cuyo plano es paralelo a II. Lo mismo ocurre con los 21 al 25 y los 26 al 30.

En el cálculo analítico que efectuaremos a continuación obtendremos las siguientes magnitudes, (distancias de vértices al plano paralelo a II que pasa por el centro O del poliedro):

7.1 Distancia de los vértices 1 al 5 (radio "a_5" de la esfera inscrita a una cara pentagonal).

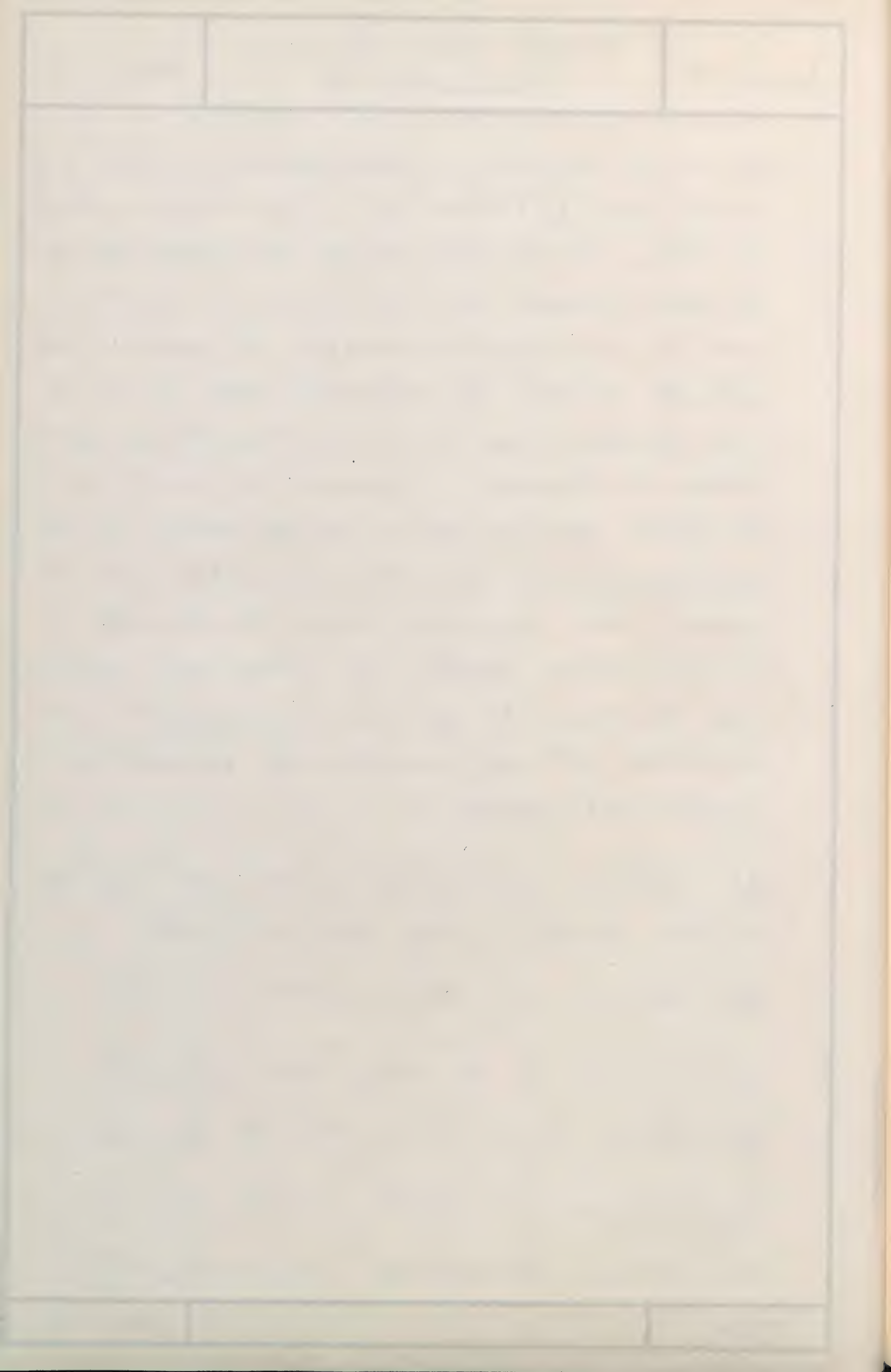
7.2 Distancia de los vértices 6 al 10 $\left(g_1 - \frac{f_1}{2}\right)$

7.3 Distancia de los vértices 11 al 15 $\left(g_2 - \frac{f_2}{2}\right)$

7.4 Distancia de los vértices 16 al 20 $\left(g_3 - \frac{f_3}{2}\right)$

7.5 Distancia de los vértices 21 al 25 $\left(g_5 - \frac{f_5}{2}\right)$

7.6 Distancia de los vértices 26 al 30 $\left(g_6 - \frac{f_6}{2}\right)$.



El conocimiento previo de las cotas anteriores, nos facilita el trazado gráfico para la obtención sucesiva de las proyecciones de los grupos de vértices 16 al 20, 21 al 25 y 26 al 30.

En efecto, si queremos p. e. determinar las proyecciones del vértice 18, perteneciente a la cara triangular 8-12-7, cuyos otros dos vértices 12 y 7 han sido ya obtenidos en el dibujo, tendremos que hacer girar dicha cara alrededor de la arista 12-7 hasta que el punto 18 esté sobre el plano del pentágono de vértices 16 al 20, el cual podemos situar previamente por la cota analítica

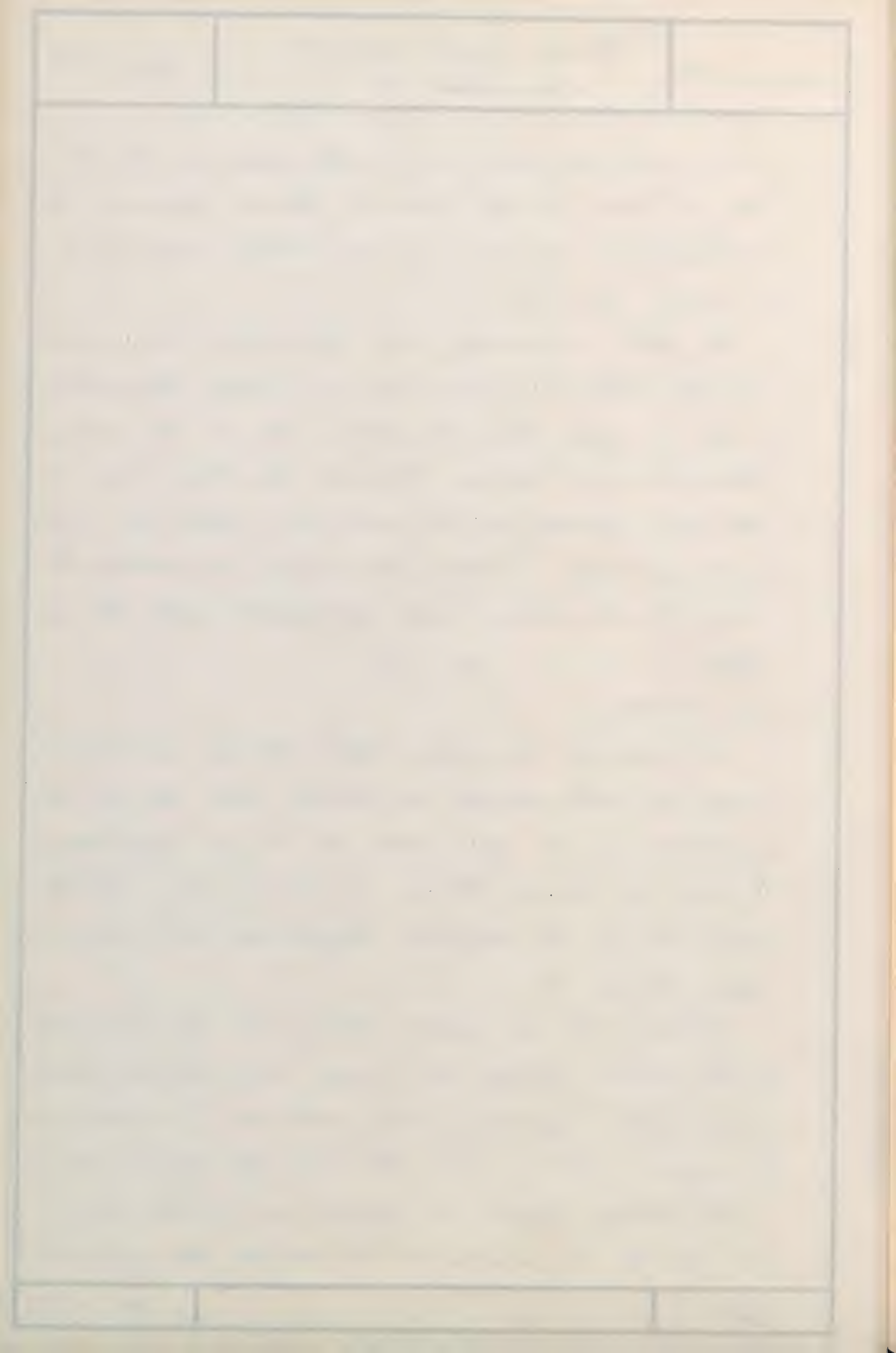
$$" g_3 - \frac{f_3}{2} "$$

ya calculada.

Esta operación se efectúa fácilmente por giro sucesivo de la arista conocida del poliedro sobre dos ejes perpendiculares a II, que pasen por 12 y 7 respectivamente, que nos permite obtener, primero en II y seguidamente en I las respectivas proyecciones del mencionado vértice 18.

Obtenida éstas se pueden determinar las proyecciones de los vértices restantes del grupo 16 al 20 que forman un pentágono regular y cuyo centro en II coincide con la proyección también en II del centro del arquimediano.

Este mismo proceso se seguirá en la determinación de las proyecciones de los vértices del grupo 21



al 25 auxiliándose de la distancia analítica "$g_4 - \frac{f_4}{2}$" y finalmente para los vértices del grupo 26 al 30, mediante la cota "$g_5 - \frac{f_5}{2}$".

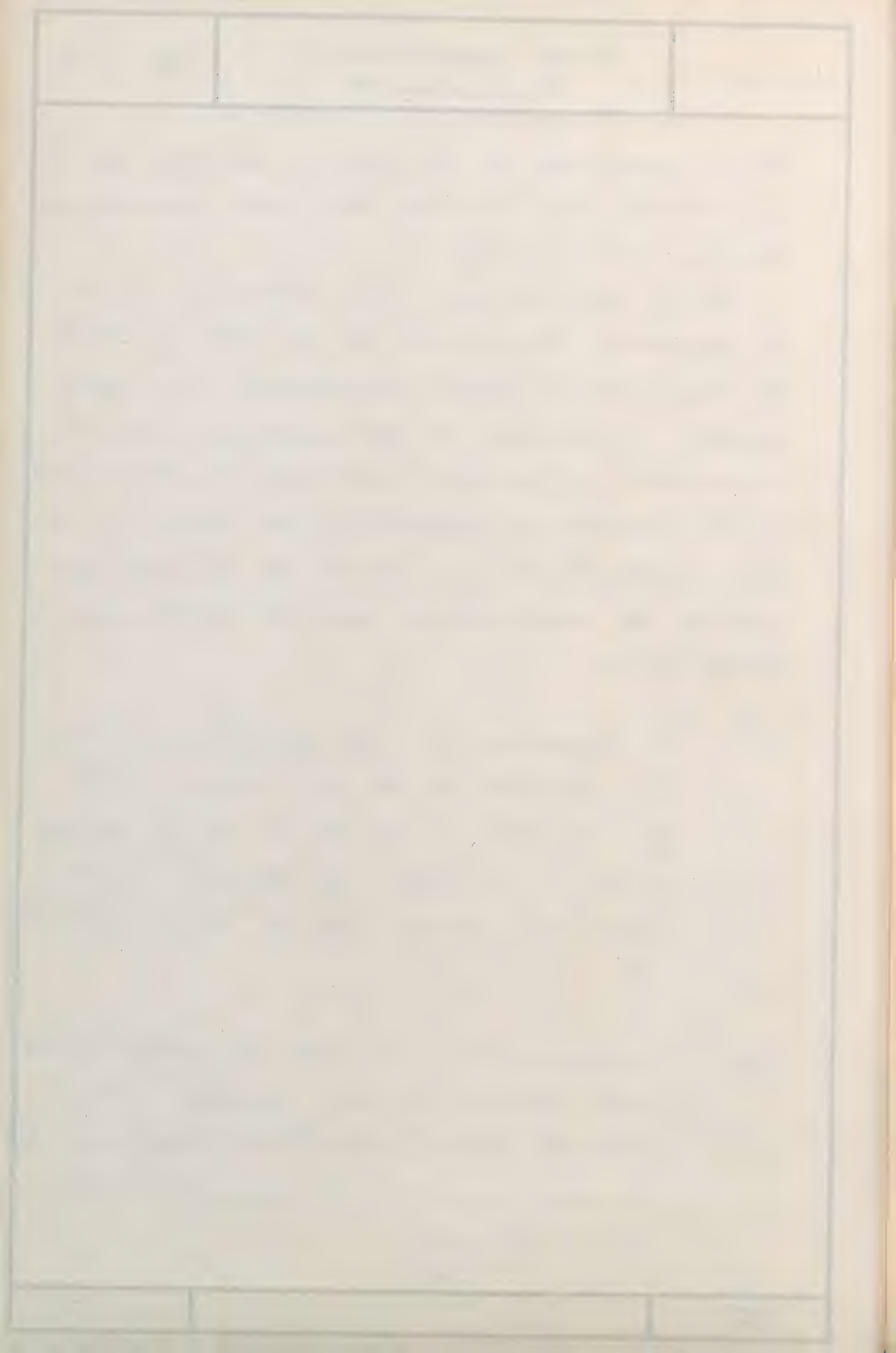
Con los pasos anteriores, hemos obtenido, en I y II, las proyecciones de la mitad de los vértices (1 al 30) del arquimediano pedido, correspondientes a su parte superior: La obtención de estas proyecciones sobre III, es inmediata, y se deduce de las de los planos I y II.

Para completar la representación del poliedro en su otra mitad, tendremos en cuenta las siguientes propiedades del arquimediano, que nos servirán para su rápido trazado.

7.7 "Las proyecciones en II, de los vértices 31 al 60, "son simétricas de las de los vértices 1 al 30 "(ya obtenidas) con respecto a un eje que pasa por la proyección O_{II} del centro, y que forma con el eje "$6_{II} - O_{II}$" un ángulo ε "de "

7.8 " Las proyecciones en I, de los vértices 31 al 60 " están situadas en planos paralelos a II y a " distancias iguales y simétricas (ya obtenidas) del " también paralelo a II que pasa por la proyección O_I del centro.

8º Numerar los vértices.



Como comprobación y necesaria ayuda para el trazado gráfico dado anteriormente vamos a determinar analíticamente las siguientes magnitudes complementarias que darán mayor exactitud a dicho trazado (ver figura de la lámina).

Altura "n" de una cara triangular

$$\boxed{n = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \ell} = 0{,}86\ 60\ 25\ 4 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será $n = 0{,}86\ 60\ 25\ 4 \times 25{,}5 = 22{,}1$ mm

---

Distancia "g_1" de los vértices 6 al 10 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los 51 al 55 a la cara pentagonal 56 al 60.

Se obtiene proyectando la altura "n" sobre el plano III; el ángulo de proyección es de

$$\varphi_{3\text{-}5} - 90^\circ = 152^\circ\ 55'\ 47{,}4'' - 90^\circ = 62^\circ\ 55'\ 47{,}4''$$

$$\boxed{g_1} = n \times \cos 62^\circ\ 55'\ 47{,}4'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 62^\circ\ 55'\ 47{,}4'' \times \ell =$$

$$= \boxed{0{,}39\ 41\ 12\ 00 \ldots \times \ell}$$

Desarrollo del cálculo anterior:



$\frac{1}{2}$ lg 3 = $\frac{1}{2}$ × 0,477 12 13 ———— = 0,238 56 07

+ lg. cos 62° 55′ 47,4″ = ———— = $\bar{1}$,658 08 90

$\bar{1}$,896 64 97

− lg. 2 = = 0,301 03 00

lg. 0,39 41 12 00... = $\bar{1}$,595 61 97

Para el caso del dibujo, será: g_1 = 0,39 41 12 00... × 25,5 = 10,0 mm

---

Distancia "f_1" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 6 al 10 y 51 al 55 respectivamente.

Se obtiene por diferencias de alturas "c_5" y "g_1", ya calculadas.

$$f_1 = 2\,(c_5 - g_1) = 2 \times (1{,}98\,09\,08\,26 - 0{,}39\,41\,12\,00) \times \ell =$$

$$= 3{,}17\,35\,92\,52\ldots\ \ell$$

Para el caso del dibujo, será: f_1 = 3,17 35 93 × 25,5 = 80,9 mm

---

Radio "r_1" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 6 al 10 y 51 al 55.* (véase nota a la vuelta)

Está representado en su verdadera magnitud, en el plano II, por el segmento 6-0, suma del 6-B y del B-0.

* NOTA

Este radio puede obtenerse directamente, en función de la distancia a que se encuentra el plano de la cara, del centro del poliedro (supuesta conocida), ya que en este caso dicho radio es el mismo que el de la circunferencia que se obtendría al seccionar la esfera circunscrita por el plano de la cara, puesto que los vértices 6 al 10 y 51 al 55 pertenecen a la esfera circunscrita del poliedro.

Esfera circunsc.
Circ. sección a la distancia x
B A a x O

$$AB = r_1 = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1)$$

a = radio de la esfera circunscrita al arquimediano.

En el caso particular que nos ocupa será, haciendo

$a = 2,15\ 58\ 30\ 31 \ldots l$ y $x = \frac{h_1}{2} = \frac{3,17\ 35\ 92\ 52}{2} l = 1,58\ 67\ 96\ 26$

$$r_1 = \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31)^2 - (1.58\ 67\ 76\ 26)^2} \times l =$$

$$= \sqrt{4,64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 2,51\ 79\ 22\ 37\ 07\ 49\ 88\ 76} \cdot l =$$

$$= \sqrt{2,12\ 96\ 81\ 95\ 47\ 64\ 70\ 85} = 1,45\ 93\ 43\ 1 \ldots l$$

(Valor coincidente con el calculado anteriormente.

$6\text{-}B = n \times \text{sen}\ 62^\circ\ 55'\ 47{,}4''$ (ver cálculo de g_1)

$B\text{-}O = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ \ell$ (radio de la circunferencia inscrita al pentágono regular de una cara, de lado "ℓ")

$$\boxed{r_1} = n \times \text{sen}\ 62^\circ\ 55'\ 47{,}4'' + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ \ell = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{sen}\ 62^\circ\ 55'\ 47{,}4'' + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right) \ell =$$

$$= \boxed{1{,}45\ 93\ 43\ 1 \ldots\ \ell}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$\frac{1}{2} \lg 3 = \frac{1}{2} \times 0{,}477\ 12\ 13$	=	$0{,}238\ 56\ 07$
$+ \lg \text{sen}\ 62^\circ\ 55'\ 47{,}4''$	=	$\bar{1}{,}949\ 60\ 94$
		$0{,}188\ 17\ 01$
$- \lg 2$	=	$- 0{,}301\ 03\ 00$
$\lg \boxed{0{,}77\ 11\ 52\ 14}$	=	$\bar{1}{,}887\ 14\ 01$

$n \times \text{sen}\ 62^\circ\ 55'\ 47{,}4'' = 0{,}77\ 11\ 52\ 14$

$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} = 0{,}68\ 81\ 91\ 0$

$$\boxed{r_1 = 1{,}45\ 93\ 43\ 1 \ldots\ \ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $r_1 = 1{,}45\ 93\ 43\ 1 \times 25{,}5 = 37{,}2$ mm.

Distancia "g_2" de los vértices 11 al 15 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los 46 al 50 a la cara pentagonal 56 al 60.



Se obtiene proyectando la arista 3-14 sobre plano III, ya que dicha arista es paralela al I.

El ángulo E de proyección se determina de la siguiente manera.

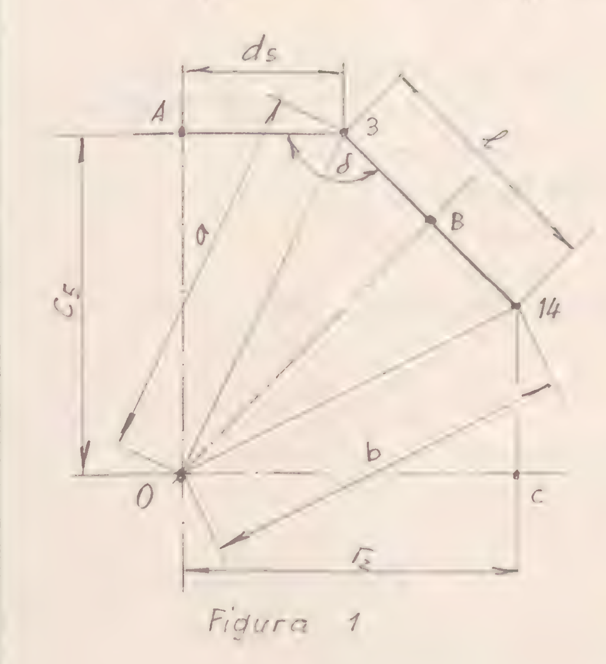


Figura 1

Consideremos (fig. 1) la sección del poliedro por el plano diametral que pasa por la arista 3-14 y el centro O del mismo. Dicho plano pasará a su vez por el centro A de la cara pentagonal 1 al 5. Unamos A, 3, B (punto medio de 3-14) y 14, con el centro O. El ángulo δ es el formado por la arista 3-14 con el plano de la cara pentagonal 1 al 5.

De la figura se deduce que

$$\cos\left(\widehat{A-3-O}\right) = \frac{d_5}{a} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\;\ell}{\dfrac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2-m^2}}} = \frac{0,85\,06\,50\,8}{2,15\,58\,30\,3} = 0.39\,45\,81\,5\ldots$$

$$\boxed{\sphericalangle\ A-3-O = 66^\circ\ 45'\ 35.4''}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg 0,39\,45\,81\,5 = \bar{1},596\,13\,67 = \lg\cos\left(\widehat{A-3-O}\right)$$

$$\sphericalangle\ \widehat{A-3-O} = 66^\circ\ 45'\ 35.4''$$



y por otra parte

$$\cos(0-3-B) = \frac{\ell:2}{a} = \frac{\ell}{2a} = \frac{\ell}{2\times\dfrac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2-m^2}}} = \frac{1}{2\times 2{,}1558\ 30\ 3} =$$

$$= \frac{1}{4{,}31\ 16\ 60\ 6} = 0{,}23\ 19\ 29\ 20$$

$$\boxed{\measuredangle(0-3-B) = 76^\circ\ 35'\ 21{,}6''}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg\cos(0-3-B) = \lg 0{,}23\ 19\ 29\ 20 = \bar{1},365\ 35\ 54$$

$$\measuredangle(0-3-B) = 76^\circ\ 35'\ 21{,}6''$$

y por consiguiente

$$\boxed{\delta} = 66^\circ\ 45'\ 36{,}4'' + 76^\circ\ 35'\ 21{,}6'' = \boxed{143^\circ\ 20^\circ\ 58''}$$

Si proyectamos la arista 3-14 sobre el plano III, el ángulo ε de proyección será:

$$\varepsilon = 143^\circ\ 20'\ 58'' - 90^\circ = 53^\circ\ 20'\ 58''$$

por lo que finalmente tendremos:

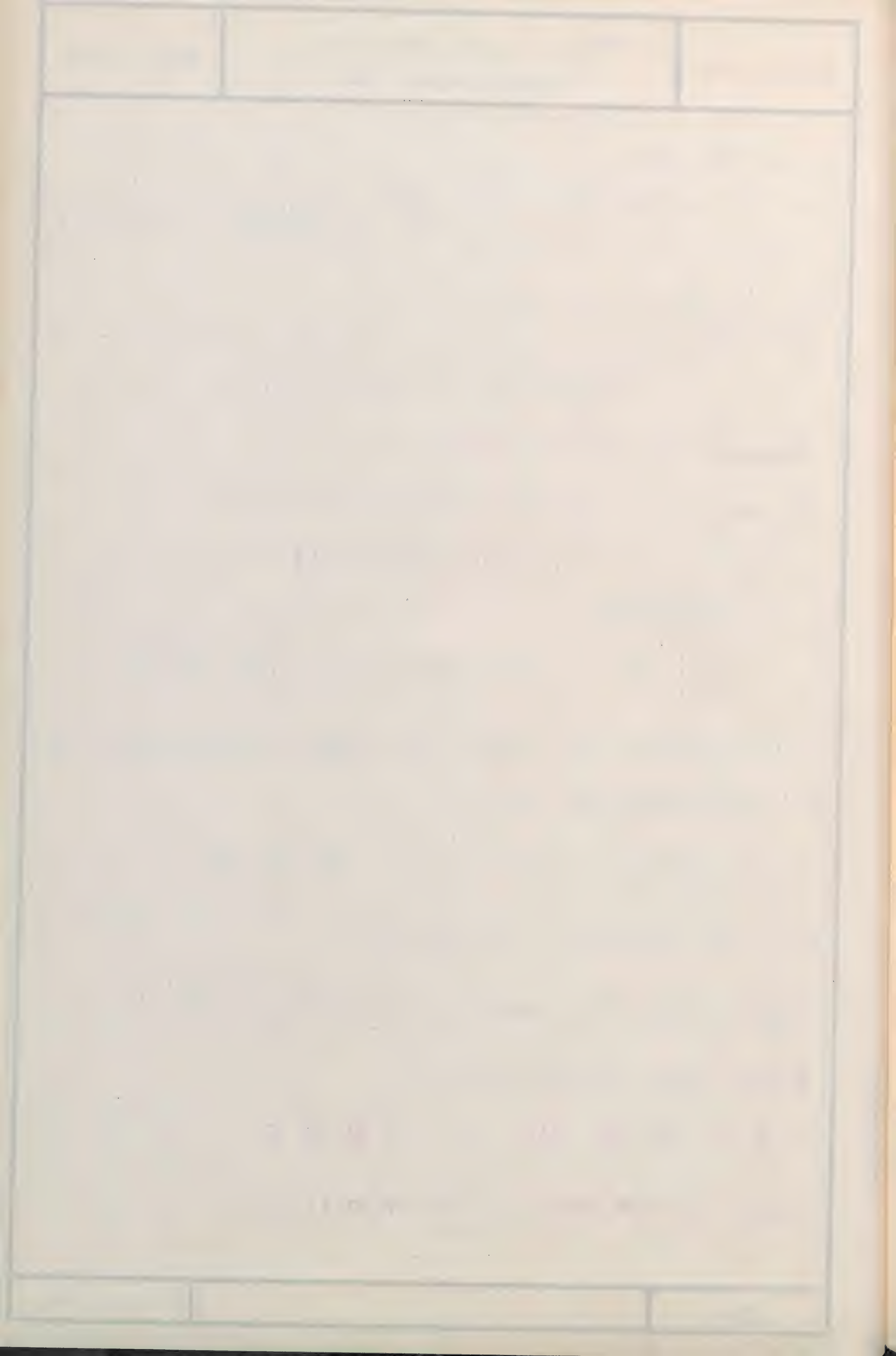
$$\boxed{g_2} = \ell\cos 53^\circ\ 20'\ 58'' = \boxed{0{,}59\ 69\ 33\ 01\ldots\ \ell}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg\cos 53^\circ\ 20'\ 58'' = \bar{1},77\ 59\ 25\ 6$$

$$\text{Antilg}\ \bar{1},77\ 59\ 25\ 6 = \boxed{0{,}59\ 69\ 33\ 01\ldots}$$

—



Para el caso particular del dibujo, será:

$$g_2 = 0{,}59\ 69\ 33\ 01 \times 25{,}5 = 15{,}2 \text{ mm.}$$

Distancia "f_2" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 11 al 15 y 46 al 50 respectivamente.

Se obtienen por diferencias de alturas "c_5" y "g_2", ya calculadas.

$$\boxed{f_2} = 2\left(c_5 - g_2\right) = 2 \times \left(1{,}98\ 69\ 08\ 26 - 0{,}59\ 69\ 33\ 01\right) \ell =$$

$$= \boxed{2{,}76\ 79\ 50\ 50 \cdot \ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $f_2 = 2{,}76\ 79\ 50\ 50 \times 25{,}5 = 70{,}6$ mm.

Radio "r_2" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 11 al 15 y 46 al 50 (ver vista al reverso de la pág. 20)

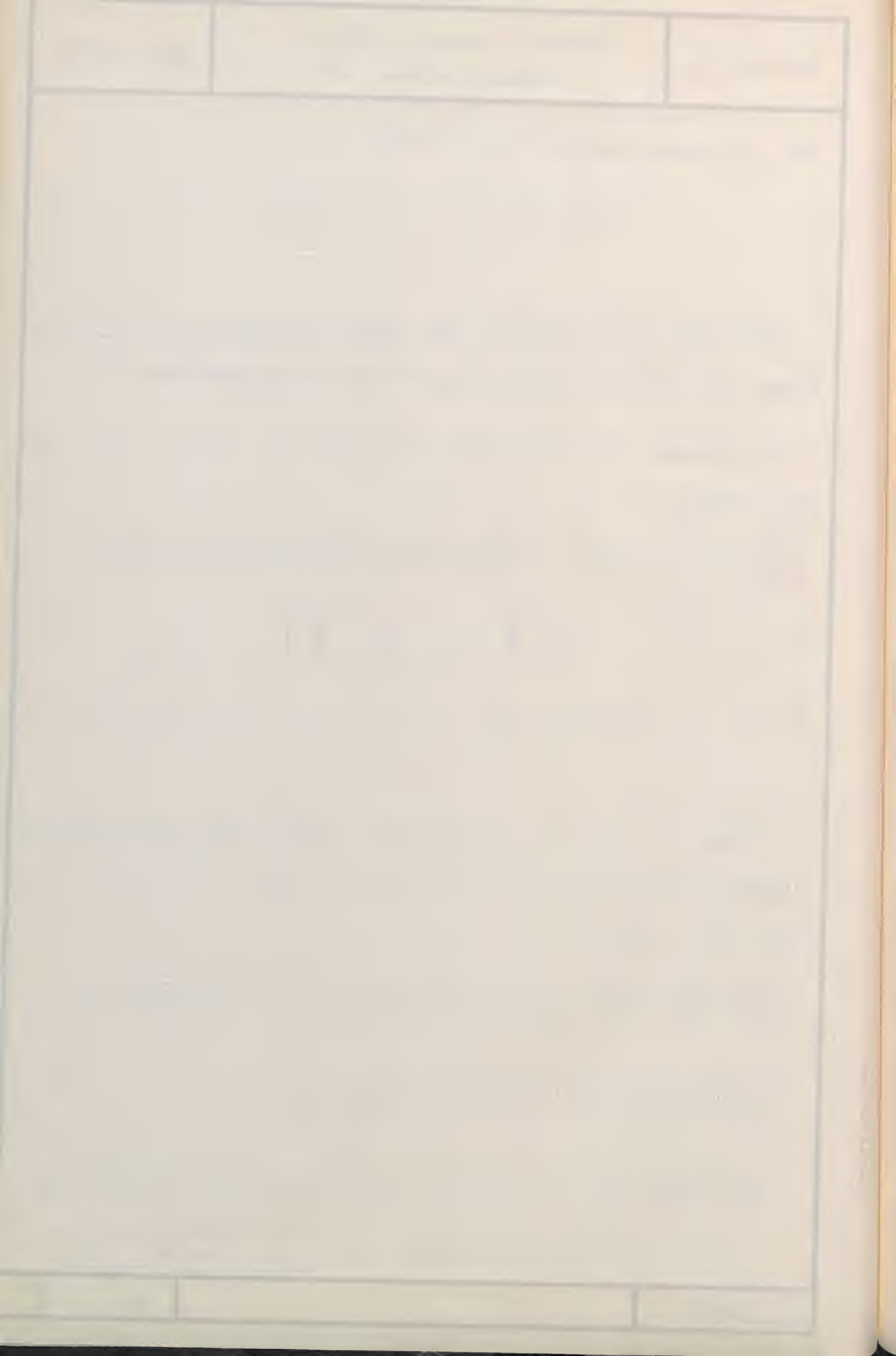
$$\boxed{r_2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_2}{2}\right)^2} = \sqrt{(2{,}15\ 58\ 30\ 31)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 2{,}76\ 79\ 50\ 50\right)^2} \times \ell$$

$$= \sqrt{(2{,}15\ 58\ 30\ 31)^2 - (1{,}38\ 39\ 75\ 25)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4{,}64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 1{,}91\ 53\ 87\ 49\ 26\ 12\ 56\ 26} \times \ell$$

$$= \sqrt{2{,}73\ 22\ 16\ 83\ 29\ 02\ 13\ 36} \cdot \ell = \boxed{1{,}65\ 29\ 41\ 87 \ldots \ell}$$

UNE A4 210 X 297



Para el caso del dibujo será: $r_2 = 1,65\ 29\ 41\ 87 \times 25,5 = 42,1$ mm.

Puede comprobarse el valor "r_2" de este radio, proyectando el contorno $A - 3 - 14$ (fig. 1) sobre el eje OC.

Su valor se obtendrá: $\boxed{r_2} = d_5 + \ell\,(\text{sen}\ \delta - 90°) =$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell + \text{sen}\,(143°\ 20'\ 58'' - 90°)\,\ell = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \text{sen}\ 53°\ 20'\ 58''\right]\cdot\ell$$

$$= (0,85\ 06\ 50\ 8 + 0,80\ 22\ 91\ 1)\,\ell = \boxed{1,65\ 29\ 41\ 9\ldots\ \ell}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$\lg\ \text{sen}\ 53°\ 20'\ 58'' = \bar{1},90\ 43\ 32\ 0$

$\text{Antilog}\ \bar{1},90\ 43\ 32\ 0 = 0,80\ 22\ 91\ 1\ldots$

valor coincidente con el obtenido anteriormente.

Distancia "g_3" de los vértices 16 al 20 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 41 al 45 a la cara pentagonal 56 al 60.

El cálculo de la situación de los grupos de vértices 16 al 20, 21 al 25 y 26 al 30, así como la de los grupos equidistantes del plano diametral, 31 al 35, 36 al 40 y 41 al 45 (cotas g_3, g_4, g_5 y f_3, f_4, f_5), se basa en



la siguiente propiedad geométrica de este arquimediano que enunciamos a continuación:

"El sólido que se obtiene al prolongar el plano de "una cara pentagonal, hasta su intersección con "las cinco caras también pentagonales que la rodean, "es un <u>dodecaedro regular</u>", siendo el centro de las "caras pentagonales del arquimediano coincidente con el de las "del dodecaedro.

De aquí se deduce que el radio c_{12} de la esfera inscrita al dodecaedro, es coincidente con el radio $c_{5\,II}$ de la esfera tangente a las caras pentagonales del Arquimediano II. Así pues podemos obtener las dimensiones del dodecaedro (ver lám. 4) en función del lado "l" del arquimediano, puesto que siendo $c_{12} = c_{5\,II}$ se verificará que (ver fórm. 32. lám. 4):

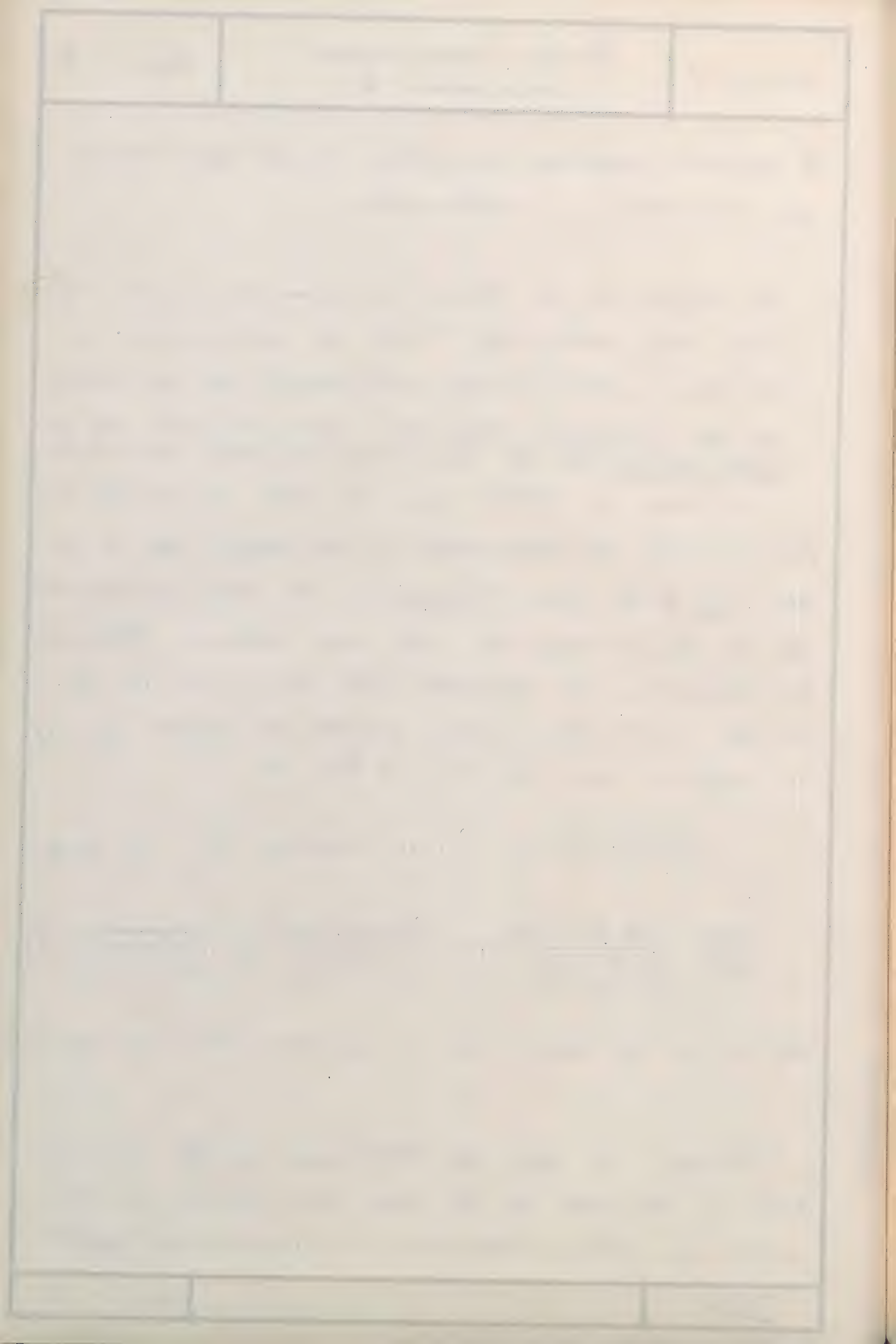
$$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\; l_{12} = 1{,}98\,09\,08\,26\ldots\, l \qquad \text{de donde}$$

$$\boxed{l_{12}} = \frac{1{,}98\,09\,08\,26}{\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}}\, l = \frac{1{,}98\,09\,08\,26}{1{,}11\,35\,16\,4}\, l = \boxed{1{,}77\,89\,75\,3\ldots\, l}$$

Para el caso del dibujo será: $l_{12} = 1{,}77\,89\,75\,3 \times 25{,}5 = 45{,}4$ mm.

Conocido el lado del dodecaedro, el del arquimediano, y el diedro de las caras del primero (ver fórm. 34, lám. 4), podemos determinar la posición del pentá-





gono del arquimediano en relación con el de la cara del dodecaedro de centro coincidente, por proyección de las alturas "g_1" y "g_2" ya determinadas.

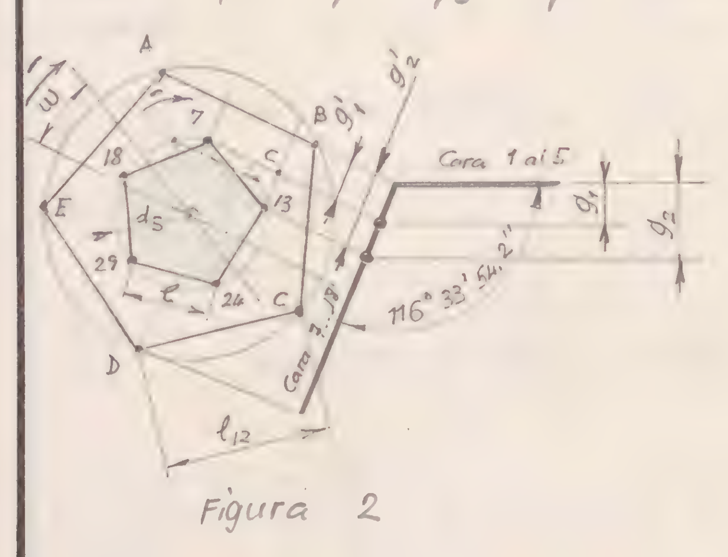


Figura 2

En la figura 2, hemos representado, a la derecha, el diedro que forman dos caras del dodecaedro, siendo el plano de la superior coincidente con el de la cara 1 al 5 del arquimediano; la figura de la izquierda es el abatimiento, sobre el plano del dibujo, de la cara oblicua, contigua a la anterior, que contiene, girada, una cara pentagonal del arquimediano dado, siendo esta última una cualquiera de las cinco que rodean a la de vértices 1 al 5.

Sea A-B-C-D-E el pentágono del dodecaedro, y 7-13-24-29-18 el pentágono del arquimediano contenido en el anterior. El ángulo de giro "ω" que habría que aplicar para pasar de una posición de lados paralelos en los dos pentágonos, a la posición real, se deduce del triángulo rectángulo 7-C-13 en el que

$$\measuredangle\ \widehat{C-7-13} = \omega$$

Su hipotenusa 7-13 es igual a "l", y su cateto



$\overline{C\text{-}13}$, es

$$\overline{C\text{-}13} = g_2' - g_1'$$

siendo "g_1'" y "g_2'" las proyecciones respectivas de "g_1" y "g_2" de las alturas ya calculadas. Por consiguiente, tendremos

$$g_2' - g_1' = \frac{g_2 - g_1}{\cos(116^\circ\ 33'\ 54{,}2'' - 90^\circ)} = \frac{0{,}59\ 69\ 33\ 01 - 0{,}39\ 41\ 12\ 00}{\cos(26^\circ\ 33'\ 54{,}2'')} \times l$$

$$= \frac{0{,}20\ 28\ 21\ 01}{0{,}89\ 44\ 27\ 14} \times l = 0{,}22\ 67\ 60\ 80 \ldots l \qquad \left\{ \begin{array}{l} g_2' = 0{,}66\ 73\ 91\ 4 \\ g_1' = 0{,}44\ 06\ 30\ 6 \end{array} \right\}$$

y finalmente

$$\text{sen}\ \omega = \text{sen}\ (\widehat{C\text{-}7\text{-}13}) = \frac{\overline{C\text{-}13}}{\overline{7\text{-}13}} = \frac{g_2' - g_1'}{l} = 0{,}22\ 67\ 60\ 80 \ldots$$

$$\boxed{\omega = 13^\circ\ 6'\ 23{,}2''}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\left. \begin{array}{l} \text{lg. cos}\ (26^\circ\ 33'\ 54{,}2'') = \bar{1}{,}95\ 15\ 45\ 0 \\ \text{Antilog}\ \bar{1}{,}95\ 15\ 45\ 0 = 0{,}89\ 44\ 27\ 14 \end{array} \right\}$$

$$\text{lg sen}\ \omega = \text{lg}\ 0{,}22\ 67\ 60\ 80 = \bar{1}{,}355\ 56\ 79$$

$$\boxed{\omega = 13^\circ\ 6'\ 23{,}2''}$$



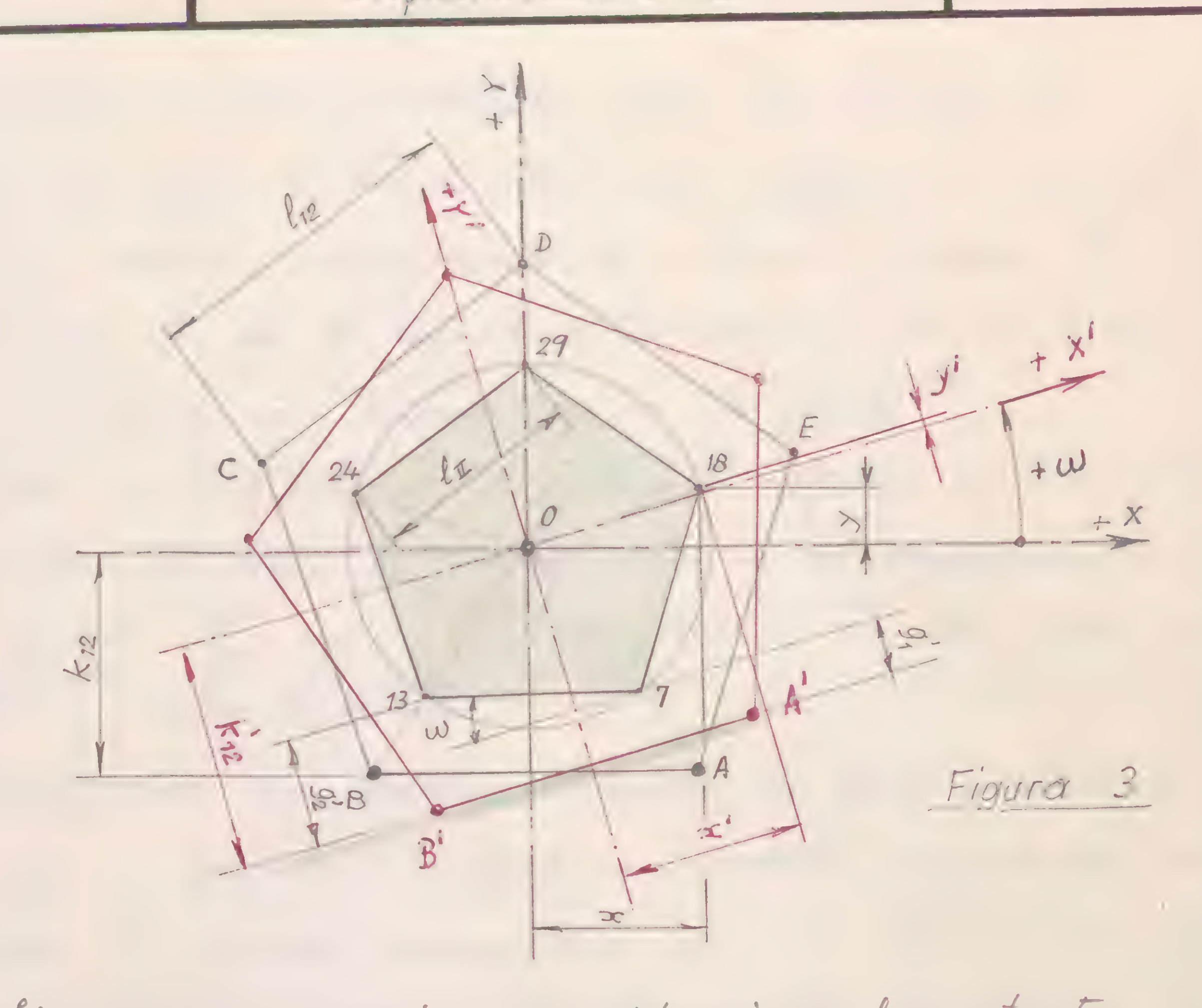


Figura 3

El proceso a seguir para determinar las restantes magnitudes analíticas "g_3", "g_4" y "g_5", requiere obtener previamente las proyecciones de las mismas "g'_3", "g'_4" y "g'_5" sobre la cara del dodecaedro que contiene la pentagonal del Arquimediano II y ambas de centro "O" común. Los lados de ambos pentágonos regulares forman entre sí el ángulo constante "w" ya determinado, por lo cual podemos considerar que, suponiendo previamente el pentágono interior colocado con sus lados paralelos al exterior, llegaríamos a la posición final del primero mediante el giro del mismo alrededor del centro común O, de un ángulo de amplitud "w" (también se llega al mismo resultado suponiendo fijo el polígono interior y



girando el exterior alrededor de O, el ángulo "ω").

En la figura 3 hemos planteado gráficamente el problema a resolver, conservando la misma notación de vértices que la de la figura 2: (el conjunto de la figura 3 está invertido con respecto al de la fig. 2).

Sea (fig. 3) A·B·C·D·E el pentágono regular de la cara del dodecaedro de lado "l_{12}"; 7-13-24-29-18 el del arquimediano dado de lado "l_{II}", en su posición inicial con sus lados paralelo y centro O común.

Consideremos un sistema cartesiano de eje X paralelo al lado B·A, y centro O. El problema analítico consiste en encontrar las nuevas coordenadas "x'" e "y'" de los vértices 7, 13, 24, 29, 18 en función de las primitivas "x" e "y", cuando los ejes, juntamente con el pentágono exterior A·B·C·D·E, giran alrededor del origen O, el ángulo "ω".

Las fórmulas de transformación son: *

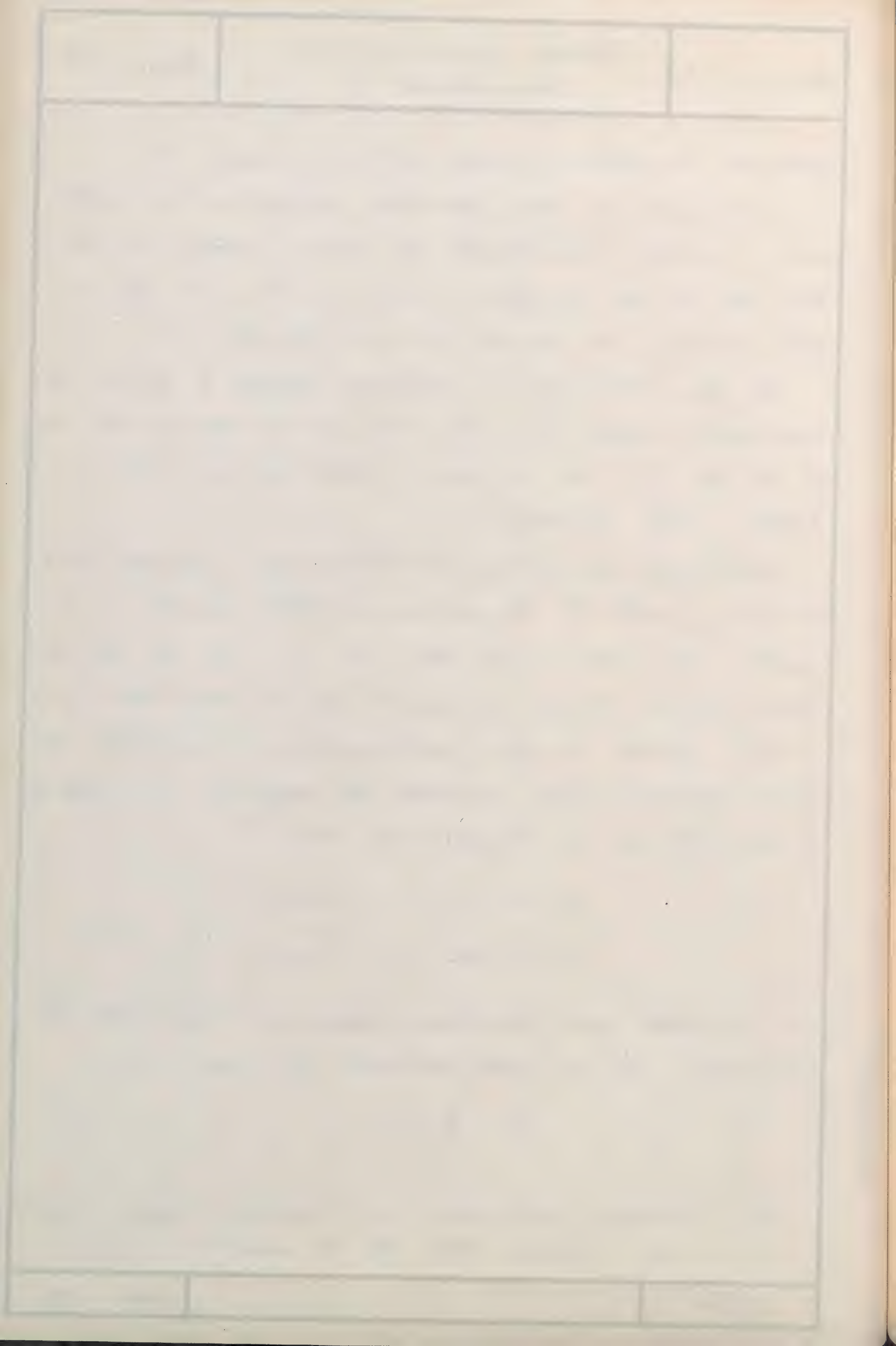
$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega \\ y' &= -x \operatorname{sen} \omega + y \cos \omega \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

de las cuales sólo necesitamos aplicar la segunda.- Conociendo "y'", se puede calcular "g'", por

$$g' = k'_{12} + y' \qquad (2)$$

---

* Véase "Tratado de Matemáticas" por R. Doerfling; Editorial Gustavo Gili, S. A.; Barcelona 1945.- Pág. 195, párrafo 3.



Comenzaremos por calcular $k_{12} = k'_{12}$ (ver fig. 3). Es la apotema de la cara pentagonal de lado "l_{12}"; su valor será pues (ver lám. de fórm. 39)

$$\boxed{k_{12}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l_{12} = 0.68\ 81\ 91\ 0\ldots\ l_{12} = 0.68\ 81\ 91\ 0\ldots \times 1.77\ 89\ 75\ 3\ldots \times l =$$

$$= \boxed{1.22\ 42\ 74\ 8\ldots\ l}$$

Continuemos calculando las coordenadas "x" e "y" de los vértices del pentágono interior de lado "l"

$$7 \begin{cases} x_7 = +\frac{1}{2}\, l = \text{———} = +0.50\ 00\ 00\ 0\ldots\ l \\ y_7 = -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l = \text{———} = -0.68\ 81\ 91\ 0\ldots\ l \end{cases}$$

$$13 \begin{cases} x_{13} = -\frac{1}{2}\, l = \text{———} = -0.50\ 00\ 00\ 0\ldots\ l \\ y_{13} = -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l = \text{———} = -0.68\ 81\ 91\ 0\ldots\ l \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} x_{18} = +\, l \operatorname{sen} 54^\circ = \text{———} = +0.80\ 90\ 16\ 9\ldots\ l \\ y_{18} = +d_l - l\cos 54^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l - \cos 54^\circ\, l \text{———} = +0.26\ 28\ 65\ 5\ldots\ l \end{cases}$$

$$24 \begin{cases} x_{24} = -\, l \operatorname{sen} 54^\circ = \text{———} = -0.80\ 90\ 16\ 9\ldots\ l \\ y_{24} = y_{18} = \text{———} = +0.26\ 28\ 65\ 5\ldots\ l \end{cases}$$

$$29 \begin{cases} x_{29} = \pm 0 = \text{———} = \pm 0 \\ y_{29} = +d_l = +\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = +0.85\ 06\ 50\ 8\ldots\ l \end{cases}$$

UNE A4 210 X 297



En los cálculos anteriores intervienen los valores:

a) $\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} = 0,68\ 81\ 91\ 0...$

b) $\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} = 0,85\ 06\ 50\ 8..$

c) cos 54°; lg cos 54° = $\bar{1},76\ 92\ 18\ 7$ cos 54° = 0,58 77 85 3...

d) sen 54°; lg sen 54° = $\bar{1},90\ 79\ 57\ 6$ sen 54° = 0,80 90 16 9...

Para aplicar las fórmulas 1) y 2) tabulamos los cálculos respectivos a continuación:

TABLA I

Vértice	x	y	$-x$ sen w = = − 0,22 67 60 8 x
7	+ 0,50 00 00 0.. ℓ	− 0,68 81 91 0... ℓ	− 0,11 33 80 4... ℓ
13	− 0,50 00 00 0.. ℓ	− 0,68 81 91 0... ℓ	+ 0,11 33 80 4.. ℓ
24	− 0,80 90 16 9... ℓ	+ 0,26 28 65 5... ℓ	+ 0,18 34 53 3... ℓ
29	± 0	+ 0,85 06 50 8... ℓ	± 0,00 00 00 0.. ℓ
18	+ 0,80 90 16 9.. ℓ	+ 0,26 28 65 5... ℓ	− 0,18 34 53 3... ℓ

Vértice	+ y cos w = = 0,97 39 50 2 y	$y' = -x$ sen w + + y cos w	$g' = k'_2 + y'$ = = 1,22 42 74 8.. ℓ + y'
7	− 0,67 02 63 8... ℓ	− 0,78 36 44 2... ℓ	+ 0,44 06 30 6... ℓ
13	− 0,67 02 63 8... ℓ	− 0,55 68 83 4... ℓ	+ 0,66 73 91 4... ℓ
24	+ 0,25 60 17 9... ℓ	+ 0,43 94 71 2... ℓ	+ 1,66 37 46 0... ℓ
29	+ 0,82 84 91 5.. ℓ	+ 0,82 84 91 5... ℓ	+ 2,05 37 66 3.. ℓ
18	+ 0,25 60 17 9... ℓ	+ 0,07 25 64 6... ℓ	+ 1,29 68 39 4... ℓ

UNE A4 210 X 297



Como puede observarse, los valores de "g_1'" y "g_2'" obtenidos en la tabla, correspondientes a los vértices 7 y 13, después del giro w, son coincidentes, como debe suceder, con los iniciales que sirvieron de base para la determinación del ángulo de giro; esto nos sirve de comprobación del cálculo realizado.

Como resultado del cálculo anterior, se han obtenido las distancias "g_1'" a "g_5'" de los vértices de una cara pentagonal del arquimediano al lado del dodecaedro regular de caras coincidentes con las anteriores (de igual esfera circunscrita), distancias medidas sobre dicha cara. Sus valores son los siguientes:

$$g_1' = 0,44\,06\,30\,6\ldots\ l \qquad \text{(vértice 7)}$$
$$g_2' = 0,66\,37\,46\,0\ldots\ l \qquad \text{(" 13)}$$
$$g_3' = 1,29\,68\,39\,4\ldots\ l \qquad \text{(" 18)}$$
$$g_4' = 1,66\,37\,46\,0\ldots\ l \qquad \text{(" 24)}$$
$$g_5' = 2,05\,27\,66\,3\ldots\ l \qquad \text{(" 29)}$$

Sólo nos resta proyectar estas distancias sobre el plano III. El ángulo de proyección será (ver fig. 2)

$$116°\ 33'\ 54,2'' - 90° = 26°\ 33'\ 54,2''$$

en el que

$$\cos 26°\ 33'\ 54,2'' = 0,89\,44\,27\,14\ldots$$

de donde se obtiene



$g_1 = 0,44\ 06\ 30\ 6 \ldots \times 0,89\ 44\ 27\ 14 \ldots \ell = 0.\ 39\ 41\ 12\ 0 \ldots \ell$

$g_2 = 0,66\ 73\ 91\ 4 \times$ " $\ldots \ell = 0,59\ 69\ 33\ 0 \ldots \ell$

$g_3 = 1.\ 29\ 68\ 39\ 4 \ldots \times$ " $\ldots \ell = 1,\ 15\ 99\ 28\ 4 \ldots \ell$

$g_4 = 1,\ 66\ 37\ 46\ 0 \ldots \times$ " $\ldots \ell = 1,\ 48\ 80\ 99\ 6 \ldots \ell$

$g_5 = 2,\ 05\ 27\ 66\ 3 \ldots \times$ " $\ldots \ell = 1,\ 83\ 60\ 49\ 9 \ldots \ell$

$$\boxed{g_3 = 1,\ 15\ 99\ 28\ 4 \ldots \ell}$$

Para el caso del dibujo será: $g_3 = 1,\ 15\ 99\ 28\ 4 \times 25,5 = 29,6$ mm

---

Distancia "f_3" entre los dos planos paralelo a II que contienen los vértices 16 al 20 y 41 al 45 respectivamente.

Se obtiene por diferencias de alturas "c_5" y "g_3", ya calculadas.

$\boxed{f_3} = 2\,(c_5 - g_3) = 2 \times (1,98\ 09\ 08\ 3 - 1,\ 15\ 99\ 28\ 4)\,\ell = \boxed{1,\ 64\ 19\ 59\ 8 \ldots \ell}$

Para el caso del dibujo será: $f_3 = 1.64\ 19\ 59\ 8 \ldots \times 25,5 = 41,9$ mm

---

Radio "r_3" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 16 al 20 y 41 al 45 respectivamente

(ver nota al reverso de la pág. 20)

$\boxed{r_3} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2} = \sqrt{(2,\ 15\ 58\ 30\ 31)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 1,\ 64\ 19\ 59\ 80\right)^2} \times \ell =$



$= \sqrt{(2.15\ 58\ 30\ 31)^2 - (0.82\ 07\ 79\ 90)^2}\ \ell =$

$= \sqrt{4.64\ 76\ 64\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 0.67\ 40\ 07\ 99\ 62\ 04\ 01}\ .\ \ell =$

$= \sqrt{3.97\ 35\ 96\ 32\ 93\ 10\ 68\ 61}\ .\ \ell =$ $\boxed{1.99\ 33\ 88\ 2\ldots\ \ell}$

Para el caso del dibujo será: $r_3 = 1,99\ 33\ 88\ 2.. \times 25,5 = 50,8$ mm

---

Distancia "g_4" de los vértices 21 al 25 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 36 al 40 a la cara pentagonal 56 al 60. (ver final cálculo "g_3")

$$\boxed{g_4 = 1,48\ 80\ 99\ 6\ldots\ \ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $g_4 = 1,48\ 80\ 99\ 6.. \times 25,5 = 37,9$ mm

---

Distancia "f_4" entre los planos paralelos a II que contienen los vértices 21 al 25 y 36 al 40, respectivamente.

Se obtiene por diferencias de alturas "c_5" y "g_4", ya calculadas.

$\boxed{f_4} = 2\ (c_5 - g_4) = 2 \times (1,98\ 09\ 08\ 3 - 1,48\ 80\ 99\ 6)\ \ell =$ $\boxed{0,98\ 56\ 17\ 4..\ \ell}$

Para el caso del dibujo, será: $f_4 = 0,98\ 56\ 17\ 4.. \times 25,5 = 25,1$ mm

---



Radio "r_4" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 21 al 35 y 36 al 40 respectivamente.

(ver nota al reverso de la página 20)

$$\boxed{r_4} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_4}{2}\right)^2} = \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 0,98\ 56\ 17\ 40\right)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31)^2 - (0,49\ 28\ 08\ 70)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4,64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 0,24\ 28\ 60\ 41\ 47\ 95\ 69\ 00} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4,40\ 47\ 43\ 91\ 07\ 19\ 00\ 61} \times \ell = \boxed{2,09\ 87\ 48\ 2 \ldots \ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $r_4 = 2,09\ 87\ 48\ 2 \ldots \times 25,5 = 53,5$ mm

---

Distancia "g_5" de los vértices 26 al 30 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 31 al 35 a la cara pentagonal 56 al 60. (ver final cálculo "g_3")

$$\boxed{g_5 = 1,83\ 60\ 49\ 9 \ldots \ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $g_5 = 1,83\ 60\ 49\ 9 \ldots \times 25,5 = 46,8$ mm

---

Distancia "f_5" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 26 al 30 y 31 al 35, respectivamente.



Se obtiene por diferencia de alturas "c_5" y "g_5", ya calculadas.

$$\boxed{f_5} = 2\,(c_5 - g_5) = 2 \times (1{,}98\,09\,08\,3 - 1{,}83\,60\,49\,9) = \boxed{0{,}28\,97\,16\,8\ldots\ \ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $f_5 = 0{,}28\,97\,16\,8\ldots \times 25{,}5 = 7{,}4$ mm

---

Radio "r_5" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 26 al 30 y 31 al 35 respectivamente.

(ver nota al reverso de la pág. 20)

$$\boxed{r_5} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_5}{2}\right)^2} = \sqrt{(2{,}15\,58\,30\,31)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 0{,}28\,97\,16\,80\right)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{(2{,}15\,58\,30\,31)^2 - (0{,}14\,48\,58\,40)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4{,}64\,76\,04\,32\,55\,14\,69\,61 - 0{,}02\,09\,83\,95\,60\,50\,56\,00} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4{,}62\,66\,20\,36\,94\,64\,13\,61} \times \ell = \boxed{2{,}15\,09\,58\,0\ldots\ \ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $r_5 = 2{,}15\,09\,58\,0\ldots \times 25{,}5 = 54{,}9$ mm

---

Ángulo "ε" que forma el eje de simetría "h", en la proyección II, con el eje paralelo a X.

Refiriéndonos a la proyección II (lám. 34), el triángu-



11-0-6 (fig. 4) tiene los valores ya calculados $6\text{-}0 = r_1$, $11\text{-}0 = r_2$ y el ángulo que forman estos lados es de $\frac{360}{5} : 2 = 36°$.

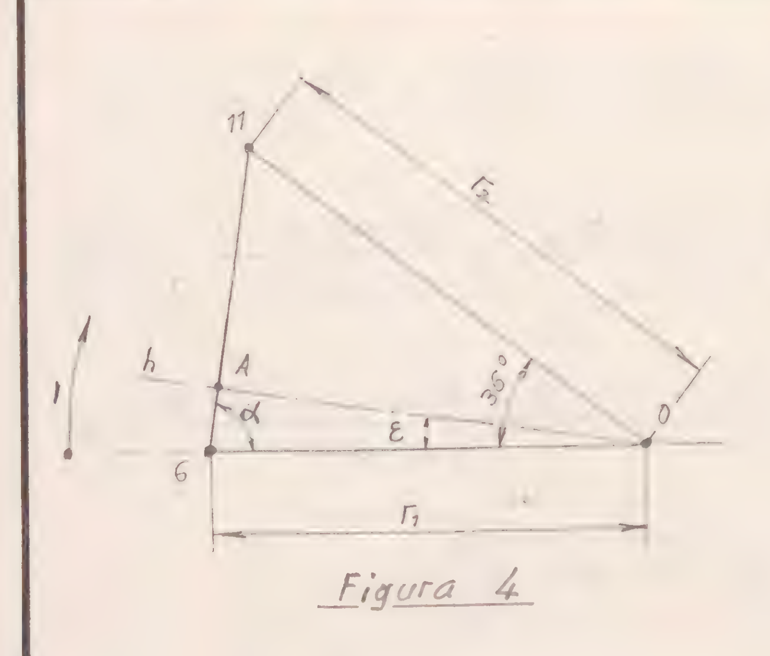


Figura 4

La altura OA de este triangulo, correspondiente a 0, es el eje "h" de simetría de las proyecciones en II de los vértices del arquimediano; este eje forma un ángulo "ε" (negativo) con el lado 0-6.

En la resolución trigonométrica de triángulos oblicuángulos, cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se obtiene otro de sus ángulos por la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{b - a \cos \gamma}$$

que aplicada al caso particular de la figura 4, haciendo

$$a = r_2 ; \quad b = r_1 \quad \gamma = 36° \quad \text{y} \quad \alpha = \widehat{0\text{-}6\text{-}11}$$

y siendo

$$\operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} 36° = 0,58\ 77\ 85\ 3 \ldots$$

$$\cos \gamma = \cos 36° = 0,80\ 90\ 16\ 9 \ldots$$

y que $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \varepsilon$, tendremos:



$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{r_2 \operatorname{sen} 36^\circ}{r_1 - r_2 \cos 36^\circ} \qquad \text{de donde}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{r_1 - r_1 \cos 36^\circ}{r_2 \operatorname{sen} 36^\circ} = \frac{1,45\ 93\ 43\ 1 \ldots \ell - 1,65\ 29\ 41\ 9 \times 0,80\ 90\ 16\ 9 \ldots \ell}{1,65\ 29\ 41\ 9 \times 0,58\ 77\ 85\ 3 \ldots \times \ell} =$$

$$= \frac{1,45\ 93\ 43\ 1 - 1,33\ 72\ 57\ 9}{0,97\ 15\ 75\ 0} = \frac{0,12\ 20\ 85\ 2}{0,97\ 15\ 75\ 0} = 0,12\ 56\ 57\ 0$$

$$\boxed{\varepsilon = 7^\circ\ 9'\ 43,5''}$$

$$\lg \operatorname{tg} \varepsilon = \bar{1},09\ 91\ 86\ 7 = \lg 0,12\ 56\ 57\ 0$$

En la página siguiente damos un resumen tabulado de las magnitudes complementarias calculadas.

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 80 triángulos equiláteros y 12 pentágonos regulares, de lado 25,5 mm de forma que en cada vértice concurran 4 triángulos y 1 cuadrado.



CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell$	$0,86\ 60\ 25\ldots\ \ell$
f_1	$2\ (c_5 - g_1)$	$3,17\ 35\ 93\ldots\ \ell$
f_2	$2\ (c_5 - g_2)$	$2,76\ 79\ 51\ldots\ \ell$
f_3	$2\ (c_5 - g_3)$	$1,64\ 19\ 60\ldots\ \ell$
f_4	$2\ (c_5 - g_4)$	$0,98\ 56\ 17\ldots\ \ell$
f_5	$2\ (c_5 - g_5)$	$0,28\ 97\ 17\ldots\ \ell$
g_1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos\ 62°\ 55'\ 47,4''\ \ell$	$0,39\ 41\ 12\ldots\ \ell$
g_2	$\cos\ 53°\ 20'\ 58''\ \ell$	$0,59\ 69\ 33\ldots\ \ell$
g_3	$g'_3\ \cos\ 26°\ 33'\ 54,2''$	$1,15\ 99\ 28\ldots\ \ell$
g_4	$g'_4\ \cos\ 26°\ 33'\ 54,2''$	$1,48\ 81\ 00\ldots\ \ell$
g_5	$g'_5\ \cos\ 26°\ 33'\ 54,2''$	$1,83\ 60\ 50\ldots\ \ell$
r_1	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f_1}{2}\right)^2}$	$1,45\ 93\ 43\ldots\ \ell$
r_2	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f_2}{2}\right)^2}$	$1,65\ 29\ 42\ldots\ \ell$
r_3	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2}$	$1,99\ 33\ 88\ldots\ \ell$
r_4	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f_4}{2}\right)^2}$	$2,09\ 87\ 48\ldots\ \ell$
r_5	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f_5}{2}\right)^2}$	$2,15\ 09\ 58\ldots\ \ell$
ω	$\operatorname{sen}\omega = \frac{g_2 - g_1}{\cos\ 26°\ 33'\ 54,2''}$	$\operatorname{sen}\omega = 0,22\ 67\ 60\ 8$ $\omega = 13°\ 6'\ 23,2''$
ε	$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{r_1 - r_2 \cos 36°}{r_2\ \operatorname{sen} 36°}$	$\operatorname{tg}\varepsilon = 0,12\ 56\ 57\ 0$ $\varepsilon = 7°\ 9'\ 43,5''$

UNE A4 210 X 297





ESTUDIO COMPLEMENTARIO AL CÁLCULO DEL RADIO "m" DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA AL POLÍGONO OBTENIDO AL UNIR LOS EXTREMOS DE LAS ARISTAS DE UN ÁNGULO SÓLIDO DE UN POLIEDRO ARQUIMEDIANO. - - -

En el estudio de dicha magnitud "m" en los arquimedianos I y II, y exclusivamente en éstos, se presenta el problema geométrico y analítico de la determinación de dicha magnitud, en el que el polígono que se forma al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido, es un pentágono irregular (plano), de cuatro lados iguales y un quinto desigual, mayor que los anteriores.

Enfocado desde el punto de vista geométrico, el problema planteado puede enunciarse de la forma siguiente:

PROBLEMA

"Inscribir un pentágono irregular"
"en una circunferencia, teniendo"
"do aquél cuatro lados iguales"
"(l), y uno desigual (a), siendo"
"$a > l$."



Para que el problema sea posible es preciso demostrar:

1º Si existe algún límite entre la relación de "a" y "l", en el que el problema no tenga solución.

2º Si existe, al menos, una cierta relación entre "a" y "l", en que se pueda construir un pentágono de las condiciones del enunciado, y que esté a su vez "inscrito en una circunferencia".

En efecto, y con respecto al punto 1º, construyamos (fig. 1) un pentágono irregular A-B-C-D-E, con las condiciones del enunciado, es decir, en el que se verifique que $BC = CD = DE = EA = l$ y $AB = a$; siendo $a > l$, el cual podrá obtenerse siempre y cuando se tenga que

Figura 1

$$BC + CD + DE + EA > AB,$$

o sea que $4l > a$, o su equivalente

$$\frac{a}{l} < 4 \qquad (1)$$

para valores de $\frac{a}{l} \geqq 4$, el problema no tiene solución geométrica. Por el contrario, para valores de



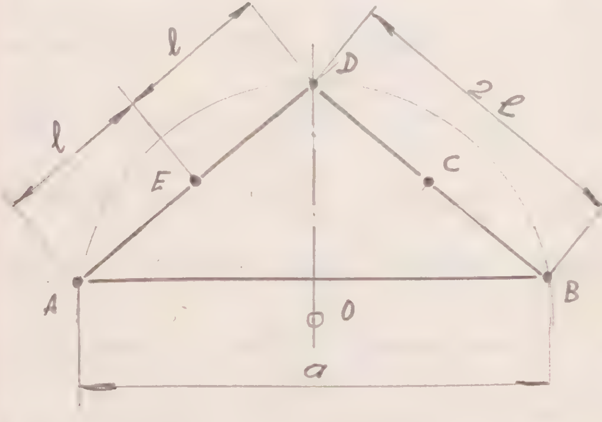
$0 < \frac{a}{l} < 4$, el problema tiene siempre solución.

Esto nos indica que "l" puede variar entre los valores

$$\frac{a}{4} < l < \infty \qquad (3)$$

Vamos a demostrar seguidamente la propiedad de que un pentágono irregular de las condiciones del enunciado, en el que se verifique la condición (2), es inscriptible en una circunferencia (punto 2º).

Para ello supongamos el pentágono dado como un sistema de varillas rígidas, articuladas en sus vértices; de esta forma podemos transformar el pentágono de la figura 1 en un triángulo isósceles, según se representa en la figura 2, en el que los vértices E y C estén alineados con los A, D y B, D, respectivamente.



Tracemos a continuación la circunferencia de centro O, circunscrita al triángulo A-D-B. Los puntos E y C son pues, <u>interiores</u> a dicha circunferencia, por ser puntos intermedios de los segmentos A-D y D-B, y éstos cuerdas de dicha circunferencia.

Transformemos de nuevo el pentágono de la figura 1, hasta conseguir que los vértices E, D y C,



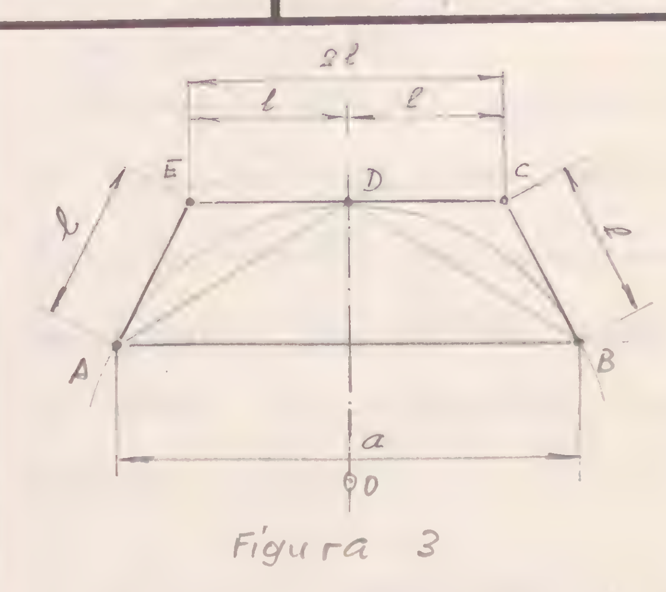


Figura 3

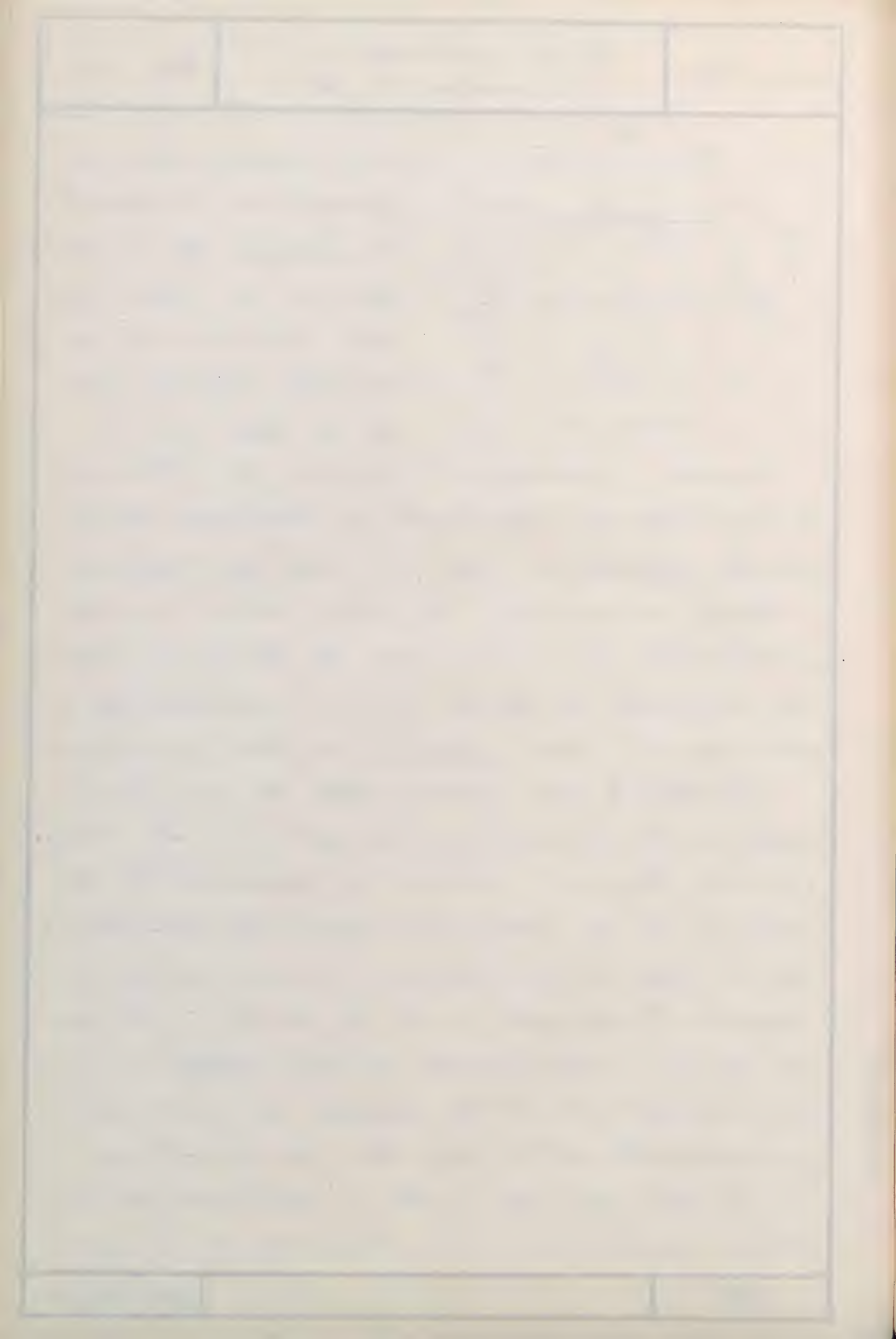
están alineados, según se representa en la figura 3; el pentágono dado se transforma en el trapecio isósceles A-B-C-E, en el que el vértice D es el centro de la base E-C.

Unamos a continuación D, con A y B, y tracemos la circunferencia circunscrita al triángulo A-D-B (también isósceles); la recta E-C, será pues tangente a dicha circunferencia (su centro O está en el eje de simetría del trapecio A-B-C-E y del triángulo A-D-B). Por consiguiente los puntos E y C, pertenecientes a dicha tangente serán exteriores a dicha circunferencia.

Considerando que podemos pasar de una forma continua del triángulo de la figura 2 al trapecio de la figura 3 mediante el acercamiento del vértice D a su lado A-B, supuesto éste inmóvil, y que en cada posición trazamos la circunferencia circunscrita al triángulo A-D-B, los puntos C y E, pasarán de una determinada posición interior de una circunferencia, a otra exterior sumamente próxima, y por consiguiente por otra intermedia que los contenga.

En esta posición límite, el pentágono dado, estará inscrito en una circunferencia (s. s. q. d.).

UNE A4 210 X 297



SOLUCION GRAFICA

No existe solución gráfica exacta, con la regla y compás, al problema planteado de encontrar la anterior circunferencia límite, ya que como veremos a continuación, la solución analítica para la obtención del radio "m" de dicha circunferencia conduce a la resolución de una ecuación cúbica.

SOLUCION ANALITICA

Supongamos el problema resuelto en un caso cualquiera, en que se cumpla la condición (2) de ser

$$\frac{a}{4} < l < \infty$$

según se representa en la figura 4.*

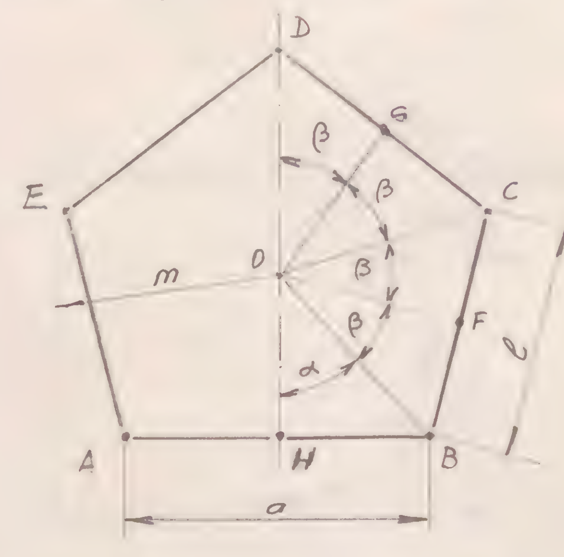


Figura 4

La solución de este problema se consigue al obtener la magnitud del radio "m" de la circunferencia circunscrita al pentágono irregular A-B-C-D-E que tiene 4 lados iguales (l) y uno desigual (a) (a > l).

---

* La figura 4 es análoga a la fig. 1 de la lámina 33, que utilizamos en la solución del Arquimediano I

UNE A4 210 X 297



Dicho pentágono tendrá un eje de simetría DH sobre el que se encuentra el centro O de la circunferencia pedida; dicho eje es la mediatriz del lado AB (a), y pasará pues por el punto H, medio del segmento AB

Unamos los vértices B y C con el centro O, así como los F y G, centro de los lados DC y CD respectivamente. Con esto se nos formará el angulo $\widehat{H\text{-}O\text{-}B} = \alpha$ y los todos iguales $\widehat{B\text{-}O\text{-}F} = \widehat{F\text{-}O\text{-}C} = \widehat{C\text{-}O\text{-}G} = \widehat{G\text{-}O\text{-}D} = \beta$, verificándose que

$$\alpha + 4\beta = \pi \qquad (3)$$

El radio "m" buscado se puede obtener en función de "β" y "l", ya que $OB = \frac{BF}{\text{sen}\,\beta}$, o sea

$$m = \frac{\frac{l}{2}}{\text{sen}\,\beta} = \frac{l}{2\,\text{sen}\,\beta} \qquad (4)$$

Para la obtención de "β" seguiremos el siguiente proceso, de acuerdo con la fig. 4

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{HB}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{m} = \frac{a}{2m} \qquad (5)$$

y tambien

$$\text{sen}\,\beta = \frac{BF}{OB} = \frac{\frac{l}{2}}{m} = \frac{l}{2m} \qquad (6)$$

dividiendo (5) por (6)

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} = \frac{a}{2m} : \frac{l}{2m} = \frac{a}{l} \qquad (7)$$



pero siendo "α" suplementario de "4β", se verificará:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 4\beta \qquad (8)$$

y teniendo en cuenta (7) y (8)

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} 4\beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{l} \qquad (9)$$

Desarrollando la (9)

$$\frac{a}{l} = \frac{\operatorname{sen} 4\beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} [2 \times (2\beta)]}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{2 \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\beta}{\operatorname{sen} \beta} =$$

$$= \frac{2 \times 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta \times (2 \cos^2 \beta - 1)}{\operatorname{sen} \beta} = 4 \cos \beta \left(2 \cos^2 \beta - 1\right) =$$

$$= 8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta \qquad \text{o sea}$$

$$8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta = \frac{a}{l}$$

de donde

$$\cos^3 \beta - \frac{1}{2} \cos \beta - \frac{a}{8l} = 0 \qquad (10)$$

ecuación cúbica en "$\cos \beta$". – Haciendo $\cos \beta = x$, será

$$x^3 - \frac{1}{2} x - \frac{a}{8l} = 0 \qquad (11)$$

Las tres raíces de esta ecuación pueden obtenerse aplicando la "Fórmula de Cardano", que exponemos a continuación.



Para ello, transformemos previamente la ecuación (11),* haciendo

$$p = -\frac{1}{2} \quad y \quad q = -\frac{a}{8l}$$

por lo que tendremos

$$x^3 + px + q_1 = 0 \qquad (12)$$

forma reducida de una ecuación cúbica completa.

Haciendo por otra parte

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

la fórmula de Cardano expresa que

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} \qquad (13)$$

siendo x_1 una de las tres raíces de la ecuación (12).

Las dos raíces restantes "x_2" y "x_3" se obtienen reduciendo la cúbica (12) a una cuadrada, al dividir dicha ecuación por "$x - x_1$".- Estas dos raíces restantes pueden ser reales o imaginarias.

Para que la primera raíz "x_1" sea real, es necesario se verifique en (13) que

$$R \geqq 0 \qquad (14)$$

---

* Ver "Matemáticas para Ingenieros y Técnicos" de R. Dörfling, pág. 58.- Editorial Gustavo Gili, S.A.- Barcelona 1945.

UNE A4 210 X 297



por lo que también será $\sqrt{R} \gtreqless 0$.

En el caso de ser $R > 0$, tendremos una raiz real y dos imaginarias.

Si fuese $R = 0$, las tres raices son reales, siendo dos de ellas iguales $(x_2 = x_3)$.

En el caso de ser $R < 0$ (caso irreducible), su solución obliga a operar en el campo complejo, obteniéndose tres raices reales diferentes.

SOLUCION DEL PROBLEMA EN CASOS PARTICULARES

1º Caso Arquimediano I

Vamos a hacer uso de la solución general planteada, a diversos casos particulares, comenzando por el del "Arquimediano I".

En éste se verifica que $\frac{a}{\ell} = \sqrt{2}$, siendo por consiguiente

$$\boxed{\ell} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = \boxed{0,70\ 71\ 06\ 8 \ldots\ a}$$

en la ecuación cúbica (11) será

$$\frac{a}{8\ell} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

por lo que aquélla se transformará en

UNE A4 210 X 297



$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

y haciendo $\quad p = -\frac{1}{2} \quad$ y $\quad q = -\frac{\sqrt{2}}{8}$

será $\quad R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} : 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} : 3\right)^3 = \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} =$

$= \dfrac{2^3 \times 3^3 - 2^7}{2^{10} \times 3^3} = \dfrac{3^3 - 2^4}{2^7 \times 3^3} > 0 \quad$ y por consiguiente

$\sqrt{R} = \sqrt{\dfrac{3^3 - 2^4}{2^7 \times 3^3}} = \sqrt{\dfrac{11}{3456}} > 0 \quad$ por lo que tendremos

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{3}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} : 2\right) + \sqrt{\frac{11}{3456}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} : 2\right) + \sqrt{\frac{11}{3456}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}}} \cong$$

$$\cong 0{,}84\ 25\ 09\ 20 = \cos \beta$$

$$\boxed{\beta = 32^\circ\ 35'\ 38{,}3''}$$

(ver desarrollo y aplicación de este cálculo, en lam. 33).
Las dos raíces restantes son imaginarias

<u>2º Caso Arquimediano II</u>

En éste se verifica que $\quad \dfrac{a}{l} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$

siendo por consiguiente

$$\boxed{l} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1}\, a = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4}\, a \cong \boxed{0{,}61\ 80\ 33\ 99 \ldots\ a}$$



en la ecuación cúbica (11) será:

$$\frac{a}{8l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2 \times 8} = \frac{\sqrt{5}+1}{16}$$

por lo que aquélla se transformará en

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}+1}{16} = 0$$

y haciendo

$$p = -\frac{1}{2} \qquad q = -\frac{\sqrt{5}+1}{16}$$

será $R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} : 3\right)^3 = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{32^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} =$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{16 \times 32} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{(3+\sqrt{5}) \times 2^3 \times 3^3 - 2^9}{2^{12} \times 3^3} = \frac{(3+\sqrt{5}) \times 3^3 - 2^6}{2^9 \times 3^3} = \frac{3^4 - 2^6 + 3^3\sqrt{5}}{2^9 \times 3^3} =$$

$$= \frac{17 + 27\sqrt{5}}{13\,824} > 0$$ y por consiguiente $\sqrt{R} > 0$

por lo que tendremos:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right) + \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} +$$

$$\sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right) - \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32} + \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32} + \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} \cong$$

$$\cong 0,85\ 77\ 80\ 67 \ldots = \cos\beta$$

$$\boxed{\beta = 30^\circ\ 55'\ 54,1''}$$

Las dos raíces restantes son imaginarias

3º caso límite en que $\frac{a}{l} = 4$

En este caso será $\boxed{l} = \frac{a}{4} = \boxed{0,25 \times a}$



en la ecuación cubica (11) será:

$$\frac{a}{8\ell} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

por lo que aquélla se transformará en

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

donde se ve de inmediato que tiene una raiz real $x_1 = 1$, que la verifica, y que al dividir la ecuación por $x - x_1 = x - 1$, da lugar a otra de segundo grado con sus dos raices restantes x_2 y x_3 imaginarias conjugadas.

Si independientemente de esto, aplicamos la fórmula general de Cardano, haciendo

$$p = -\frac{1}{2} \qquad q = -\frac{1}{2}$$

será $R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}:2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}:3\right)^3 = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} =$

$$= \frac{2^3 \times 3^3 - 2^4}{2^7 \times 3^3} = \frac{3^3 - 2}{2^4 \times 3^3} = \frac{25}{2^4 \times 3^3} = \frac{5^2}{2^4 \times 3^3} > 0$$ y por consiguiente

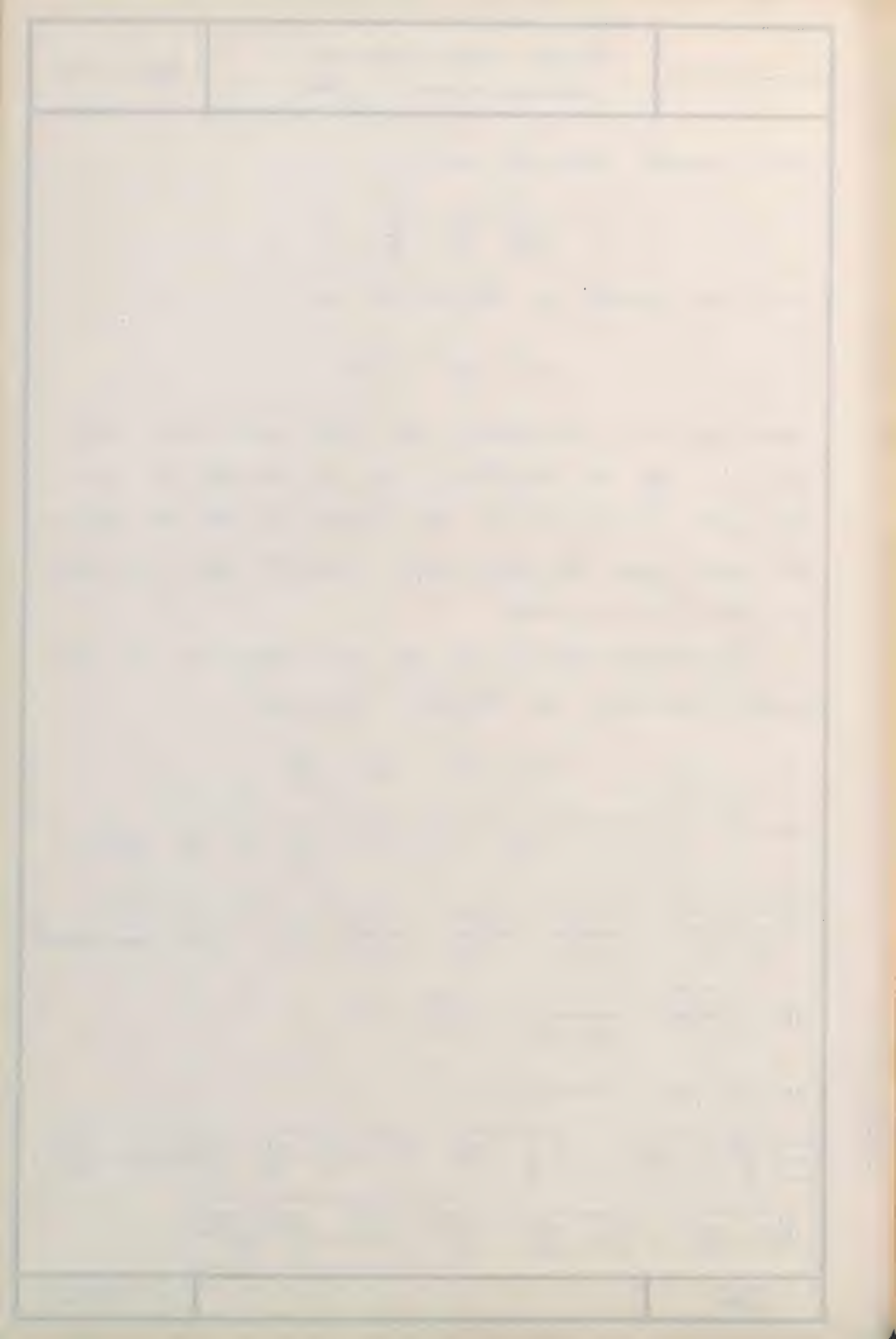
$$\sqrt{R} = \sqrt{\frac{5^2}{2^4 \times 3^3}} = \frac{5}{2^2 \times 3 \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{36} > 0$$

por lo que tendremos:

$$\boxed{x_1} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{1}{2}:2\right) + \frac{5\sqrt{3}}{36}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{1}{2}:2\right) - \frac{5\sqrt{3}}{36}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{36}} = \boxed{\sqrt[3]{\frac{9 + 5\sqrt{3}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{9 - 5\sqrt{3}}{36}}}$$

UNE A4 210 X 297



mas teniendo en cuenta el valor de "x_1" ya obtenido anteriormente, podemos escribir la notable propiedad numérica siguiente:

$$\sqrt[3]{\frac{9+5\sqrt{3}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{36}} = 1 \qquad \cos\beta = 1 \qquad \beta = 0^\circ$$

Las dos raíces restantes son imaginarias

4° Caso límite en que $\frac{a}{l} = 0$

En este caso será $\quad l = \frac{a}{0} = \infty$

en la ecuación cúbica (1), tendremos

$$\frac{a}{8l} = \frac{0}{8} = 0$$

por lo que aquélla se transformará en

$$x^3 - \frac{1}{2}x - 0 = 0$$

o sea $\quad x^3 = \frac{1}{2}x \qquad x^2 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

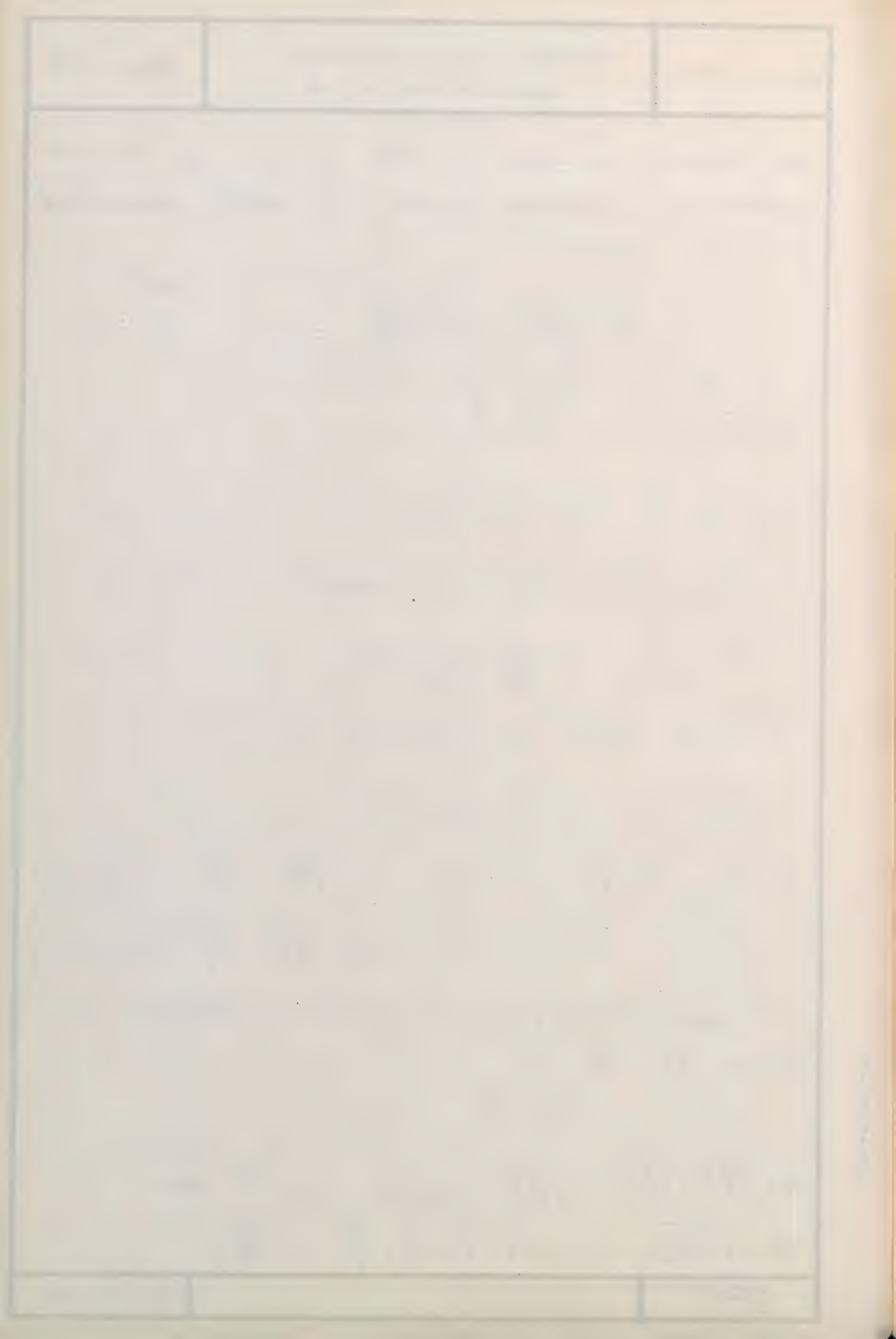
$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \beta = 45^\circ$$

Si aplicamos la fórmula general de Cardano, tendremos, haciendo

$$p = -\frac{1}{2} \qquad q = 0$$

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2\times 3}\right)^3 = -\frac{1}{2^3\times 3^3}$$ y de aquí

$$\sqrt{R} = \sqrt{-\frac{1}{2^3\times 3^3}} = \frac{1}{6}\times\sqrt{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{6}\,i = \frac{\sqrt{6}}{36}\,i$$



por lo que será

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{36}\, i} + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{6}}{36}\, i} = -\sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{18}} = 0$$

$$\cos \beta = 0$$

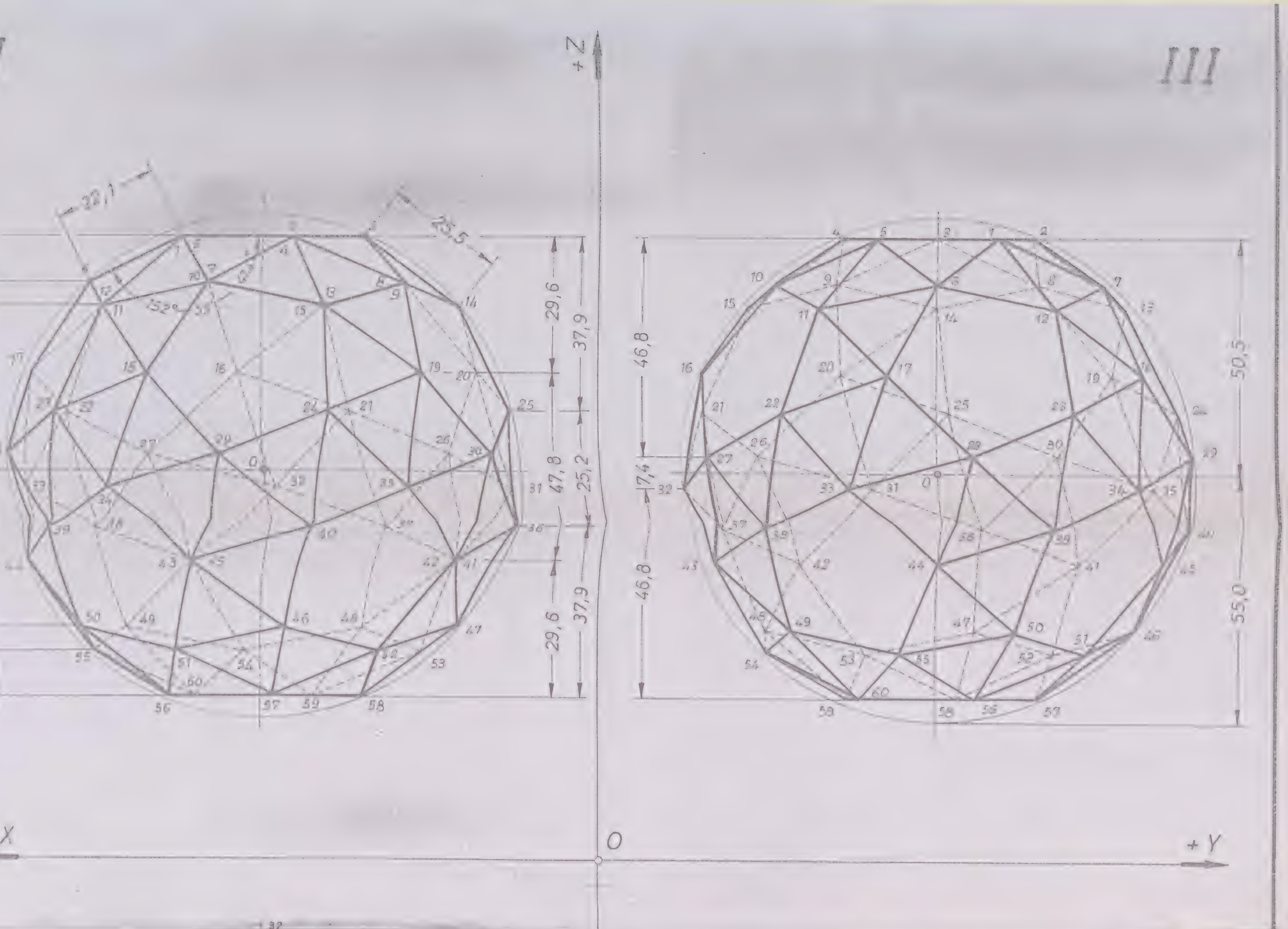
$$\beta = 90^\circ$$

En el problema planteado sólo tiene sentido geométrico la raíz "x_2"

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \beta = 45^\circ$$

UNE A4 210 X 297





ARQUIMEDIANO II

Número de caras triangulares	C_3 = 80
Número de caras pentagonales	C_5 = 12
Número de vértices	V = 60
Número de aristas	A = 150
Número de caras de un ángulo sólido:	$4C_3 + 1C_5$

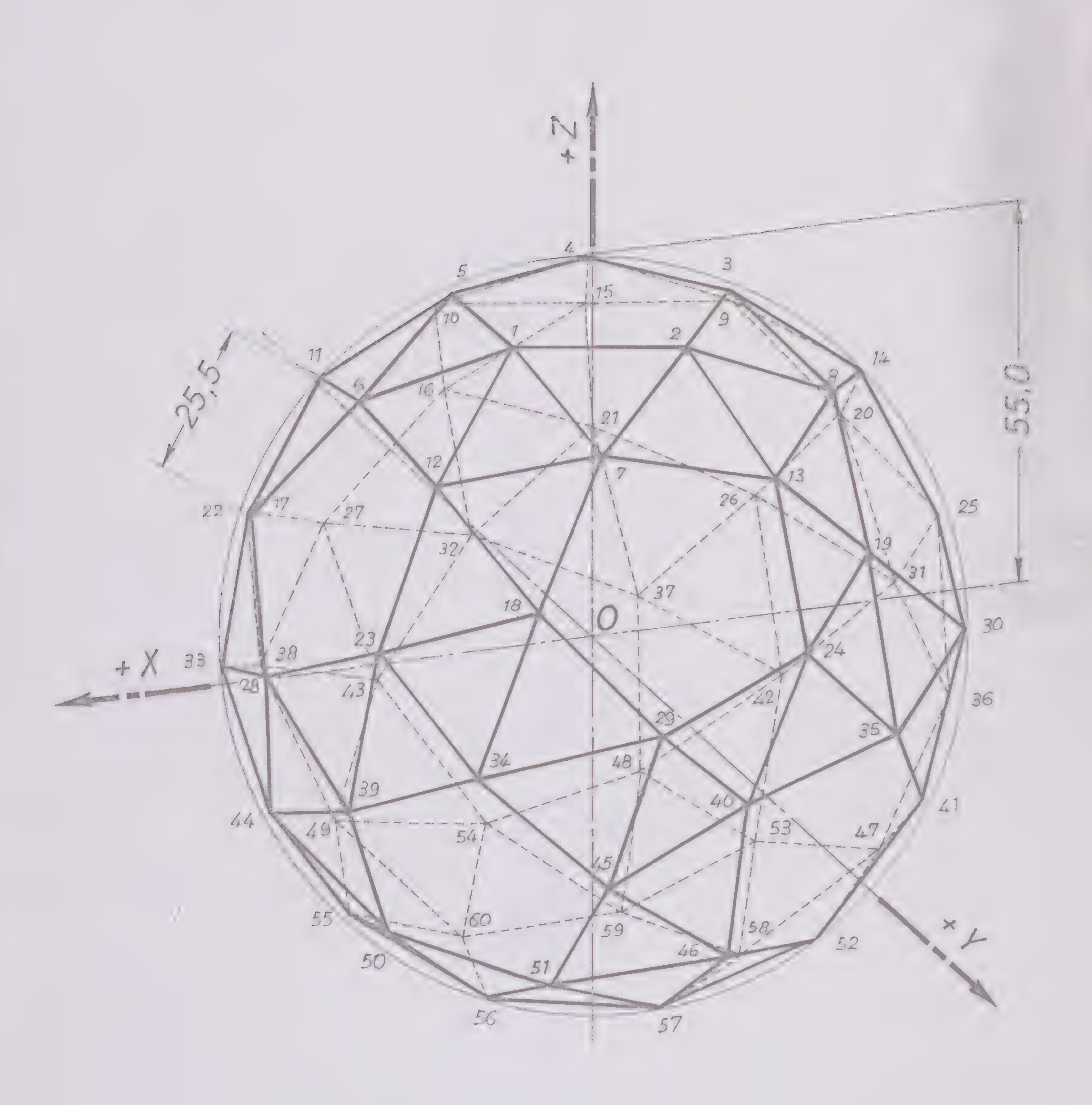
ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III el Arquimediano II, en el que en cada vértice concurren cuatro triángulos equiláteros y un pentágono regular.

La longitud de su lado es de 25,5 milímetros y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano II					Lámina 34 / Curso 19 -19



Arquimediano II

Lámina 35	Poliedros arquimedianos Arquimediano III $(2P_3 + 2P_4)$	35

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano III en el que en cada vértice concurren dos triángulos equiláteros y dos cuadrados, alternados.

La longitud de su lado es de 55 mm. y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 55) mm.

Dibújese en formato A3V. y a escala 1:1

DATOS O (72, 72, 55) mm

l_{III} = 55 mm

[illegible]		18-3-73



CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del Arquimediano III (dato del ejercicio)

a = Radio de la esfera circunscrita

b = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares

c_4 = Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas.

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular.

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

α_4 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arqui-



mediano, que pasa por una arista de aquélla.

φ_{3-4} = Ángulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra cuadrada.

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano nos indica que tiene 8 caras regulares triangulares, y 6 caras cuadradas; 12 vértices y 24 aristas.

En cada vértice concurren 2 caras triangulares, 2 cuadradas y, por consiguiente, 4 aristas del mismo.

Así pues, tendremos que

Arquimediano III $(2P_3 + 2P_4)$; $C_3 = 8$; $C_4 = 6$; $V = 12$; $A = 24$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas de un án-



este sólido.

Este polígono es un rectángulo ABCD (fig. 1), uno de cuyos lados es el lado del arquimediano (lado de las caras triangulares) y el otro la diagonal de las caras cuadradas.

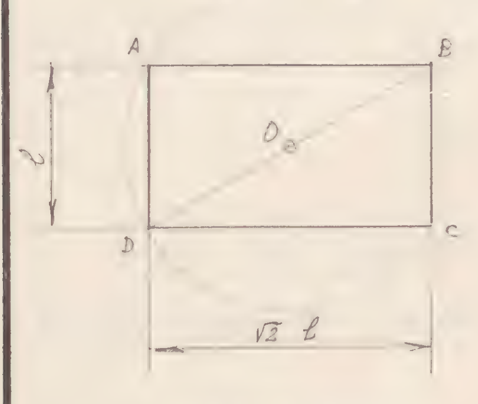


Figura 1

El radio pedido será la semidiagonal OD de dicho rectángulo.

Su valor será pues

$$\overline{OD} = \boxed{m} = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 + (\sqrt{2}\,\ell)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell} = 0{,}86\;60\;25\;4\ldots\;\ell$$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33) a este caso particular de "m"

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell\right)^2}} = \boxed{\ell}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell\right)^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \frac{3}{4}\ell^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{1 - \frac{3}{4}}\;\ell} = \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \ell$$



Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell} = 0,86\ 60\ 25\ 4 \ldots \ell$$

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell} = 0,57\ 73\ 50\ 27 \ldots \ell$$

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell} = 0,70\ 71\ 06\ 8 \ldots \ell$$

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\ell = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}\ell} = 0,81\ 64\ 96\ 58 \ldots \ell$$



Radio "c_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2 - (d_4)^2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} \cdot \ell = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell} = 0.70\ 71\ 06\ 8\ldots\ \ell$$

Ángulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se determina, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33):

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{2\,c_3}{\sqrt{4\,(d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}\,\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell\right)^2 - \ell^2}} = \boxed{2\sqrt{2}} = 2,82\ 84\ 27\ 12\ldots$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}\,\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3} - 1}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{18}}{3} = \frac{2 \times 3\sqrt{2}}{3} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_3 = 2.82\ 84\ 27\ 12 = 0.451\ 54\ 50$

$$\boxed{\alpha_3 = 70^\circ\ 31'\ 43{,}6''}$$

Ángulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.



Se determina en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33)

$$\boxed{tg\ \alpha_4} = \frac{2\ c_4}{\sqrt{4\,(d_4)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell\right)^2 - \ell^2}} = \boxed{\sqrt{2}} = 1,41\ 42\ 13\ 56 \ldots$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{tg\ \alpha_4} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{2}\ \ell}{\sqrt{(2-1)\,\ell^2}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$lg\ tg\ \alpha_4 = \log.\ 1,41\ 42\ 13\ 56 = 0,150\ 51\ 50 \qquad \boxed{\alpha_4 = 54^\circ\ 44'\ 8,2''}$$

<u>Ángulo rectilíneo "φ_{3-4}" del diedro formado por una cara triangular y una cuadrada</u>

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{3-4}} = \alpha_3 + \alpha_4 = 70^\circ\ 31'\ 43,6'' + 54^\circ\ 44'\ 8,2'' =$$

$$= \boxed{125^\circ\ 15'\ 51,8''}$$

<u>Comprobación</u>:

Siendo $\varphi_{3-4} = \alpha_3 + \alpha_4$, tendremos que

$$tg\ \varphi_{3-4} = \frac{tg\ \alpha_3 + tg\ \alpha_4}{1 - tg\ \alpha_3\ tg\ \alpha_4} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{1-4} = -\sqrt{2} = -\,tg\ \alpha_4$$

y por lo tanto:

$$\varphi_{3-4} + \alpha_4 = 125^\circ\ 15'\ 51,8'' + 54^\circ\ 44'\ 8,2'' = 180^\circ \text{ (suplementarios)}$$



Área lateral "S" del arquimediano

Se compone de 8 caras triangulares y 6 cuadradas, de lado "ℓ"; la superficie total será:

$$\boxed{S} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\, \ell^2 + 6\, \ell^2 = \left(2\sqrt{3} + 6\right) \ell^2 = \boxed{2\left(\sqrt{3}+3\right) \ell^2} = 9{,}46\ 41\ 01\ 62 \ldots \ell^2$$

—

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 8 pirámides de base triangular y altura "c_3" y de 6 pirámides de base cuadrada y altura "c_4": su valor será:

$$\boxed{V} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\, \ell^2 \times \frac{c_3}{3} + 6\, \ell^2 \times \frac{c_4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, \ell^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}\, \ell + 2\, \ell^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, \ell =$$

$$= \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{3}\, \ell^3} = 2{,}35\ 70\ 22\ 60 \ldots \ell^3$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$V = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, \ell^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}\, \ell + 2 \cdot \ell^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, \ell = \left(\frac{2\sqrt{18}}{9} + \sqrt{2}\right) \ell^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\right) \ell^3 =$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{3}\, \ell^3$$

—

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 8 triángulos equiláteros y



6 cuadrados, de lado 55 mm., de forma que en cada vértice concurran 2 triángulos y 2 cuadrados alternados.

A continuación damos un resumen tabulado de las anteriores magnitudes calculadas.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	ℓ	$1.00\ 00\ 00 \ldots \ell$
b	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$	$0.86\ 60\ 25 \ldots \ell$
c_3	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ell$	$0.81\ 64\ 97 \ldots \ell$
c_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$	$0.70\ 71\ 07 \ldots \ell$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ell$	$0.57\ 73\ 50 \ldots \ell$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$	$0.70\ 71\ 07 \ldots \ell$
m	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$	$0.86\ 60\ 25 \ldots \ell$
α_3	$tg\ \alpha_3 = 2\sqrt{2}$	$tg.\ \alpha_3 = 2.82\ 84\ 27 \ldots$ $\alpha_3 = 70^\circ\ 31'\ 43,6''$
α_4	$tg.\ \alpha_4 = \sqrt{2}$	$tg\ \alpha_4 = 1.41\ 42\ 14 \ldots$ $\alpha_4 = 54^\circ\ 44'\ 8,2''$
φ_{3-4}	$\alpha_3 + \alpha_4$	$\varphi_{3-4} = 125^\circ\ 15'\ 51,8''$
S	$2(\sqrt{3}+3)\ell^2$	$9.46\ 41\ 02 \ldots \ell^2$
V	$\frac{5\sqrt{2}}{3}\ell^3$	$2.35\ 70\ 23 \ldots \ell^3$

Relaciones entre magnitudes

$a = \ell \qquad b = m \qquad c_4 = d_4$

UNE A4 210 X 297



Lámina 35	Poliedros arquimedianos Arquimediano III	Hoja nº 9

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Después del cálculo de magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 35, a la representación del Arquimediano III cuyo lado conocido, es de 55 mm.

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{III} = (dato del ejercicio) = 55,0 mm

$a = l_{III}$ = = 55,0 mm

b = 0,86 60 25 .... × 55 = 47,6 mm

c_3 = 0,81 64 97 .... × 55 = 44,9 mm

c_4 = 0,70 71 07 .... × 55 = 38,9 mm

d_3 = 0,57 73 50 .... × 55 = 31,7 mm

d_4 = 0,70 71 07 .... × 55 = 38,9 mm

El orden de operaciones para el trazado gráfico, es el siguiente:

1º Situar el centro O de coordenadas 72, 72, 85.

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio a = 55 mm.

3º Representar en I, II y III la cara cuadrada 1-2-3-4, supuesto el poliedro colocado con dicha cara paralela a II y un lado (1-4) perpendicular a I (utilícese la cota "c_4" en I y III).

4º Trazar en II el cuadrado 5-6-7-8, circunscrito al 1-2-3-4 (lados perpendiculares a las diagonales).

E.S.		24 - 2 - 73



Lámina 35	Poliedros arquimedianos Arquimediano III	Hoja nº 10

5º Con el trazado ya realizado puede terminarse la representación en I y III, por simetría axial, pudiendo observarse que son iguales de forma, pero no en lo que respecta a la coloración de vértices.

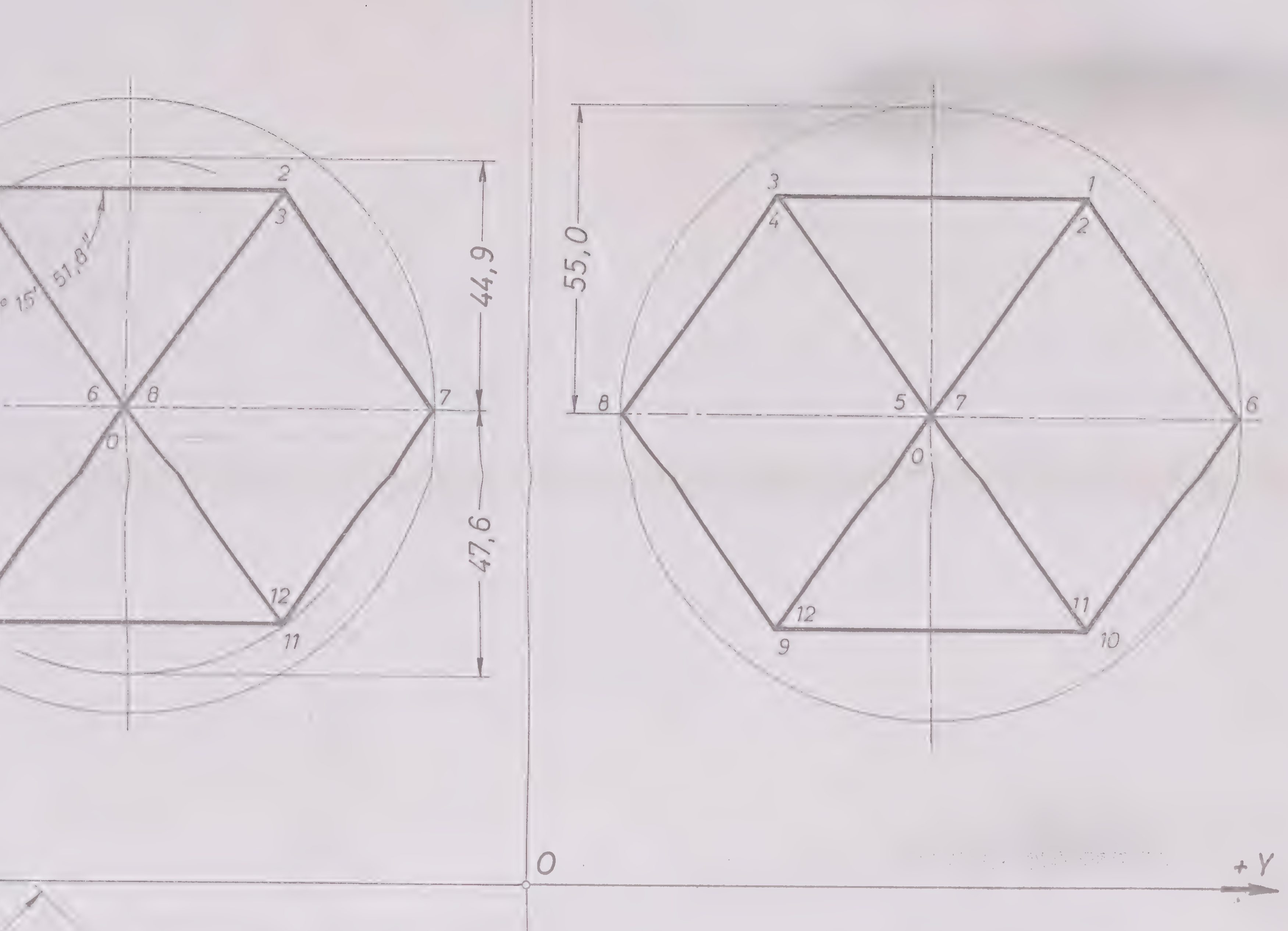
6º Numerar los vértices y comprobar en el dibujo las magnitudes "b", "c_3" y "$d_4 = c_4$".

[signature]		24 - 3 - 73

UNE A4 210 X 297







ARQUIMEDIANO III

Número de caras triangulares	C_3 = 8
Número de caras cuadradas	C_4 = 6
Número de vértices	V = 12
Número de aristas	A = 24
Número de caras de un ángulo sólido:	$2C_3 + 2C_4$

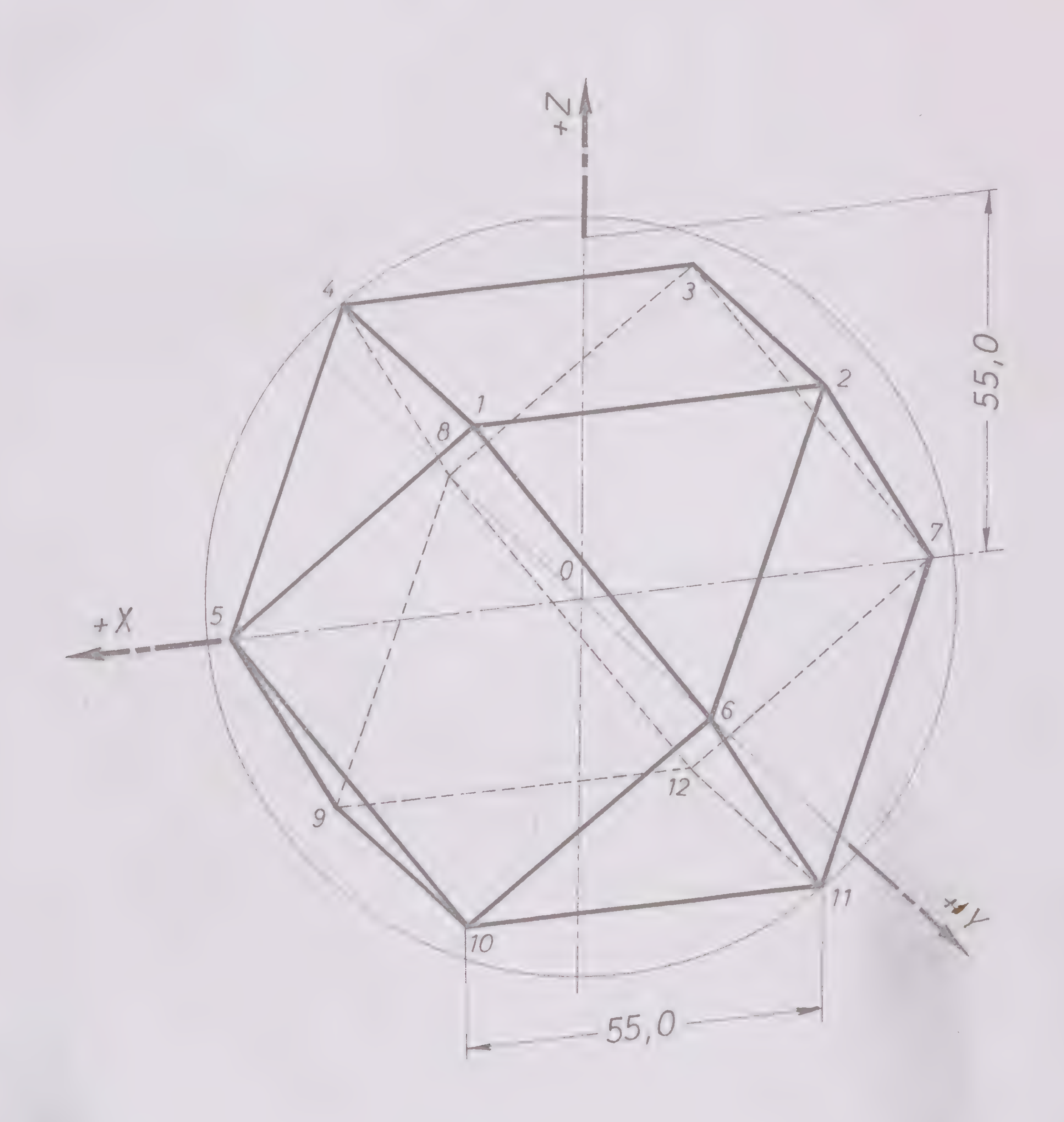
ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano III, en el que en cada vértice concurren dos triángulos equiláteros y dos cuadrados.

La longitud de su lado es de 55 milímetros y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1 : 1	Arquimediano III					Lámina 35 — Curso 19 -19



Arquimediano III

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano IV en el que en cada vértice concurren dos triángulos equiláteros y dos pentágonos regulares, alternados.

La longitud de su lado es 34 mm y las coordenadas de su centro O, son O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_{IV} = 34 mm



CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano las directrices y fórmulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del arquimediano IV. (dato del ejercicio)

a = Radio de la esfera circunscrita.

b = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

c_5 = Radio de la esfera tangente a las caras pentagonales.

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular.

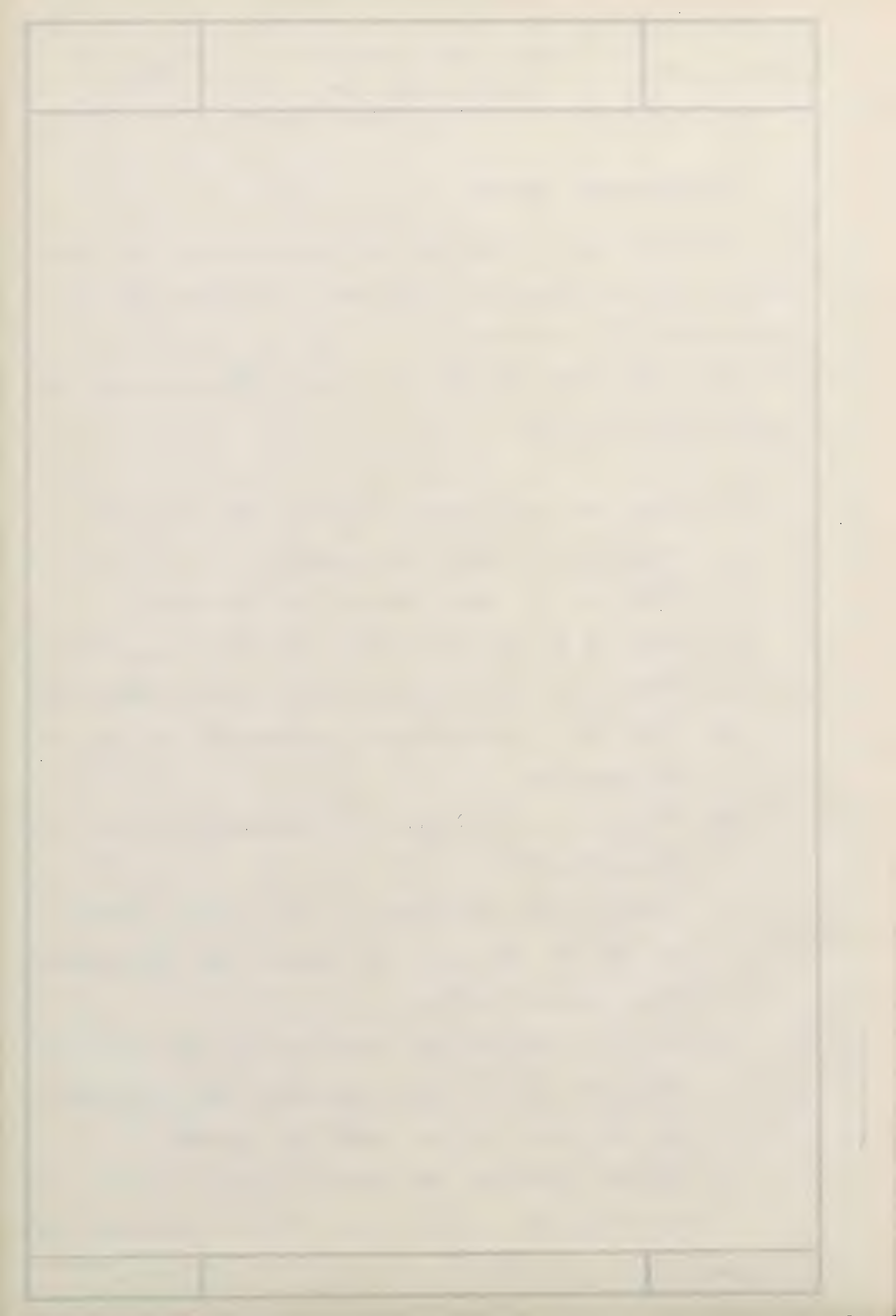
d_5 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

α_5 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara pentagonal regular, con el plano diametral del

UNE A4 210 X 297



arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

$\varphi_{3\text{-}5}$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra pentagonal.

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 20 caras triangulares regulares, y 12 caras pentagonales regulares; 30 vértices y 60 aristas.

En cada vértice concurren alternadamente 2 caras triangulares y dos pentagonales y, por consiguiente, 4 aristas del mismo.

Así pues, tendremos que

ARQUIMEDIANO IV $(2\,P_3 + 2\,P_5)$; $C_3 = 20$; $C_5 = 12$; $V = 30$; $A = 60$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio



Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas de un ángulo sólido.

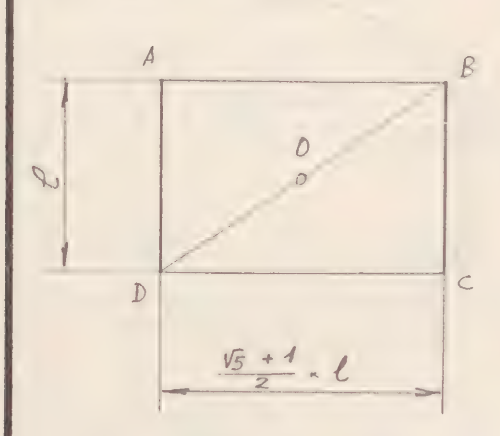


Figura 1

Este polígono es el rectángulo A·B·C·D (fig. 1), uno de cuyos lados es el lado del arquimediano (lado de las caras triangulares) y el otro es la diagonal del pentágono de lado "ℓ" de su cara contigua.

El valor de la diagonal del pentágono regular, en función de su lado, se demuestra en Geometría es

$$DC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell$$

El radio pedido será la semidiagonal OD de dicho rectángulo. Su valor será pues

$$OD = \boxed{m} = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\ell} = 0{,}95\ 10\ 56\ 51\ldots\ \ell$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{m} = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 + \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}\,\ell^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{5+1+2\sqrt{5}}{4}}\;\ell =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{6+2\sqrt{5}}{4}}\;\ell = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}}\;\ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\;\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\;\ell}$$



Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33), a este caso particular.

$$a = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\ell\right)^2}} = \frac{\ell}{2\sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}}} = \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}}{\frac{3-\sqrt{5}}{4}}\,\ell = \frac{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}}{3-\sqrt{5}}\,\ell = \frac{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\times(3+\sqrt{5})}{4}\,\ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{8}}\,\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{4(3+\sqrt{5})}{8}}\,\ell = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\,\ell = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\,\ell = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\,\ell = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell} =$$

$$= 1{,}61\,80\,33\,99\ldots\,\ell$$

(igual a la diagonal de una cara pentagonal)

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas.

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\,\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}}\times\ell = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}-1}{4}}\,\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}}\,\ell = \boxed{\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell} = 1{,}53\,88\,41\,76\ldots\,\ell$$

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular de lado ℓ

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell} = 0{,}57\,73\,50\,27\ldots\,\ell$$



Radio "d_5" de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal.

Se demuestra en Geometría es

$$\boxed{d_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, \ell} = 0{,}85\,06\,50\,8 \ldots \ell$$

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}-2}{6}}\,\ell = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}\,\ell = \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{6}}\,\ell = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{6}}\,\ell = \left(\sqrt{\frac{9}{12}} + \sqrt{\frac{5}{12}}\right) \times \ell =$$

$$= \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)\ell = \left(\frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{15}}{6}\right)\ell = \boxed{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\,\ell} = 1{,}51\,15\,22\,63 \ldots \ell$$

Radio "c_5" de la esfera tangente a las caras pentagonales de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_5} = \sqrt{a^2 - (d_5)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ell\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \cdot \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}-5-\sqrt{5}}{10}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}}{10}}\,\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell} = 1{,}37\,63\,81\,9 \ldots \ell$$



Angulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se determina, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33)

$$\boxed{tg\ \alpha_3} = \frac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - l^2}} = \frac{2 \times \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\, l}{\sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} l\right)^2 - l^2}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{3\sqrt{4 \times \frac{1}{3} - 1}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{9+\sqrt{45}}{3} = \frac{9+3\sqrt{5}}{3} = \boxed{3+\sqrt{5}} = 5{,}23\ 60\ 67\ 98\ldots$$

$lg\ tg\ \alpha_3 = 0{,}719\ 00\ 52$ $\qquad \boxed{\alpha_3 = 79°\ 11'\ 15{,}7''}$

Angulo rectilíneo "α_5" del diedro formado por una cara pentagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se determina, en función de la tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_5} = \frac{2c_5}{\sqrt{4(d_5)^2 - l^2}} = \frac{2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ l}{\sqrt{4\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2 - l^2}} = \frac{2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{4 \times \frac{5+\sqrt{5}}{10} - 1}} = \frac{2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5} - 1}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}} = 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} : \frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \boxed{2}$$

$lg\ tg\ \alpha_5 = lg\ 2 = 0{,}30\ 10\ 30\ 0$ $\qquad \boxed{\alpha_5 = 63°\ 26'\ 5{,}8''}$

UNE A4 210 X 297



Ángulo rectilíneo "φ_{3-5}" del diedro formado por una cara triangular y una pentagonal regulares.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 35), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{3-5}} = \alpha_3 + \alpha_5 = 79^\circ\ 11'\ 15,7'' + 63^\circ\ 26'\ 5,8'' =$$

$$= \boxed{142^\circ\ 37'\ 21,5''}$$

COMPROBACION

$$tg\ \varphi_{3-5} = tg\left(\alpha_3 + \alpha_5\right) = \frac{tg\ \alpha_3 + tg\ \alpha_5}{1 - tg\ \alpha_3\ tg\ \alpha_5} = \frac{(3+\sqrt{5}) + 2}{1 - (3+\sqrt{5}) \times 2} =$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{1-6-2\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{-5-2\sqrt{5}} = -\frac{5+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} = -\frac{(5+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{5} =$$

$$= -\frac{25+5\sqrt{5}-10\sqrt{5}-10}{5} = -\frac{15-5\sqrt{5}}{5} = -\left(3-\sqrt{5}\right) = -0,76\ 39\ 32\ 02 \ldots$$

$$-lg\ tg\ \varphi_{3-5} = lg\ 0.76\ 39\ 32\ 02 = \bar{1},883\ 05\ 48$$

$$-\varphi_{3-5} = -37^\circ\ 22'\ 38,5''$$

$$\boxed{\varphi_{3-5}} = 180^\circ - 37^\circ\ 22'\ 38,5'' = \boxed{142^\circ\ 37'\ 21,5''}$$

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de 20 caras triangulares y 12 caras pentagonales, ambas regulares y de lado "l"; la su-



perficie será:

$$\boxed{S} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2 + 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4}\,\ell^2 = \boxed{\left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\right)\ell^2} =$$

$$= (8{,}66\,02\,54\,1 + 20{,}64\,57\,28\,8)\,\ell^2 = 29{,}30\,59\,82\,9\ldots\,\ell^2$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 20 pirámides de base triangular y altura "c_3" y de 12 pirámides de base pentagonal regular y altura "c_5"; su valor será:

$$\boxed{V} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2 \times \frac{c_3}{3} + 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4}\,\ell^2 \times \frac{c_5}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\ell^2 \times \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{6}\,\ell +$$

$$+ \frac{3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{3}\,\ell^2 \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\,\ell = \left(\frac{5 \times (3\sqrt{3}\,\sqrt{3} + \sqrt{15}\,\sqrt{3})}{18} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\right)\ell^3 = \left(\frac{5(9 + 3\sqrt{5})}{18} + \sqrt{\frac{(25 + 10\sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5})}{5}}\right)\ell^3 =$$

$$= \left(\frac{5(3 + \sqrt{5})}{6} + \sqrt{\frac{125 + 50\sqrt{5} + 50\sqrt{5} + 100}{5}}\right)\ell^3 = \left(\frac{5(3 + \sqrt{5})}{6} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5} + 10\sqrt{5} + 20}\right)\ell^3$$

$$= \left(\frac{5(3 + \sqrt{5})}{6} + \sqrt{45 + 20\sqrt{5}}\right)\ell^3 = \left(\frac{5(3 + \sqrt{5})}{6} + \sqrt{(9 + 4\sqrt{5}) \times 5}\right)\ell^3 =$$

$$= \left(\frac{5(3 + \sqrt{5})}{6} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \times \sqrt{5}\right)\ell^3 = \left[\frac{5(3 + \sqrt{5})}{6} + \left(\sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}}\right)\sqrt{5}\right]\ell^3 =$$

$$= \left[\frac{5(3 + \sqrt{5})}{6} + (\sqrt{5} + 2) \times \sqrt{5}\right]\ell^3 = \left(\frac{5(3 + \sqrt{5})}{6} + 5 + 2\sqrt{5}\right)\ell^3 =$$



$$= \frac{15 + 5\sqrt{5} + 30 + 12\sqrt{5}}{6}\,\ell^3 = \boxed{\frac{45 + 17\sqrt{5}}{6}\,\ell^3} = 13,83\,55\,25\,94\ldots\,\ell^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 20 triángulos equiláteros y 12 pentágonos regulares, de lado 34 mm, de forma que en cada vértice concurran 2 triángulos y 2 pentágonos.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell$	$1,61\,80\,34\ldots\,\ell$
b	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell$	$1,53\,88\,42\ldots\,\ell$
c_3	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\,\ell$	$1,51\,15\,23\ldots\,\ell$
c_5	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$1,37\,63\,82\ldots\,\ell$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell$	$0,57\,73\,50\ldots\,\ell$
d_5	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,85\,06\,51\ldots\,\ell$
m	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\ell$	$0,95\,10\,57\ldots\,\ell$
α_3	$tg\,\alpha_3 = 3+\sqrt{5}$	$tg\,\alpha_3 = 5,23\,60\,68$ $\alpha_3 = 79^\circ\,11'\,15,7''$
α_5	$tg\,\alpha_5 = 2$	$\alpha_5 = 63^\circ\,26'\,5,8''$
φ_{3-5}	$\alpha_3 + \alpha_5$ $tg\,\varphi_{3-5} = -(3-\sqrt{5})$	$-tg\,\varphi_{3-5} = 0,76\,39\,32$ $\varphi_{3-5} = 142^\circ\,37'\,21,5''$
S	$\left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\ell^2$	$29,30\,59\,83\ldots\,\ell^2$
V	$\frac{45+17\sqrt{5}}{6}\,\ell^3$	$13,83\,55\,26\ldots\,\ell^3$



PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales vamos a proceder en la lámina 36, a la representación gráfica del arquimediano IV.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementarias cuyo cálculo efectuaremos posteriormente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado "l_{IV}" del arquimediano, cuya longitud es de 34 mm.

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{IV} = (dato del ejercicio) = 34.0 mm

a = 1,61 80 34... × 34 = 55.0 mm

b = 1,53 88 42... × 34 = 52.3 mm

c_3 = 1,51 15 23... × 34 = 51.4 mm

c_5 = 1.37 63 82... × 34 = 46.8 mm

d_3 = 0,57 73 50... × 34 = 19,6 mm

d_5 = 0,85 06 51-... × 34 = 28.9 mm

El orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 36) es el siguiente:

1º Situar el centro 0, de coordenadas 72, 72, 85 mm

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio a = 55 mm



Lámina 36	Poliedros arquimedianos Arquimedianos IV	Hoja n.º 11

3º Representar en I, II y III, la cara pentagonal, supuesto el poliedro colocado con dicha cara paralela a II, y un lado (3-4) perpendicular a I (utilícese la cota "c_5" en I y III, y la "d_5" en II)

4º Obtener en I, las proyecciones del vértice 9 de la cara contigua triangular de arista 3-4 hasta colocar el vértice 9 sobre la esfera circunscrita. Para ello se hará centro en en 3_I, con radio igual a la altura "h" de la cara 3-4-9 y se trazará un arco que corte en 9_I a la esfera circunscrita.

5º Determinar las proyecciones en II y III de dicho vértice 9, y seguidamente en I, II y III la de los vértices 6, 7, 8 y 10 (dichos vértices son a su vez de un pentágono regular de plano paralelo al II).

6º Determinar en II la posición de los vértices 11 al 20; éstos son los de un decágono regular de lado "l_{IV}" inscrito en una circunferencia de radio "a"; los vértices 11 y 16 están sobre el eje paralelo al "Y".

7º Obtener las proyecciones de los anteriores vértices 11 al 20, sobre I y III; el plano que los contiene es paralelo a II.

8º Obtener las proyecciones en II de los restantes vértices 21 al 31, sabiendo que son simétricos con respecto a un eje paralelo a Y, que pasa por O. Los n.º 21, 22, 23, 24,

UNE A4 210 X 297



25, 26, 27, 28, 29, 30 se corresponderán respectivamente con los 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Con estas propiedades, y conociendo la altura "f", se puede obtener fácilmente las proyecciones en I y III de los mencionados vértices 21 al 30. Las cotas "b", "c_3", "f" y "g" sirven de comprobación al trazado gráfico.

Como comprobación y necesaria ayuda para el trazado gráfico dado anteriormente, vamos a determinar analíticamente las siguientes magnitudes complementarias que darán mayor exactitud a dicho trazado (ver lám. 36).

Altura "n" de una cara triangular

Se demuestra en Geometría es

$$\boxed{n = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l} = 0.86\,60\,25\,4\ldots\,l$$

Para el caso del dibujo, será: $n = 0.86\,60\,25\,4 \times 34 = 29.4$ mm.

Distancia "g" de los vértices 6 al 10 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 21 al 25 a la cara pentagonal 26 al 30

Se obtiene proyectando la altura "n" sobre el plano III;



el ángulo de proyección es de

$$\varphi_{3-5} - 90° = 142° \; 37' \; 21{,}5'' - 90° = 52° \; 37' \; 21{,}5''$$

$$\boxed{g} = n \times \cos 52° \; 37' \; 21{,}5'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 52° \; 37' \; 21{,}5'' \times \ell =$$

$$= \boxed{0{,}52\;57\;31\;10\ldots \times \ell}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$\frac{1}{2}\,\lg 3 = \frac{1}{2} \times 0{,}477\;12\;13$ ————	$= 0{,}238\;56\;07$
$+ \lg \cos 52° \; 37' \; 21{,}5'' =$ ————	$= \bar{1},783\;23\;30$
	$0{,}021\;79\;37$
$- \lg 2 =$ ————	$= 0{,}301\;03\;00$
$\boxed{\lg 0{,}52\;57\;31\;10\ldots}$	$= \bar{1},720\;76\;37$

Para el caso del dibujo, será: $g = 0{,}52\;57\;31\;10\ldots \times 34 = 17{,}9$ mm

---

Distancia "f" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 6 al 10 y 21 al 25 respectivamente.

Se obtien por diferencia de las alturas "c_5" y "g", ya calculadas.

$$\boxed{f} = 2\,(c_5 - g) = 2 \times (1{,}37\;63\;81\;9 - 0{,}52\;57\;31\;1)\;\ell =$$

$$= \boxed{1{,}70\;13\;01\;6\ldots\;\ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $f = 1{,}70\;13\;01\;6 \times 34 = 57{,}8$

UNE A4 210 X 297



Radio "r" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 6 al 10 y 21 al 25.

Es el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y cateto "$\frac{f}{2}$". Su valor será:

$$r = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2} = \sqrt{(1,61\ 80\ 34\ 0)^2 - (0.85\ 06\ 50\ 8)^2} = 1,37\ 63\ 81\ 9 \ldots\ \ell$$

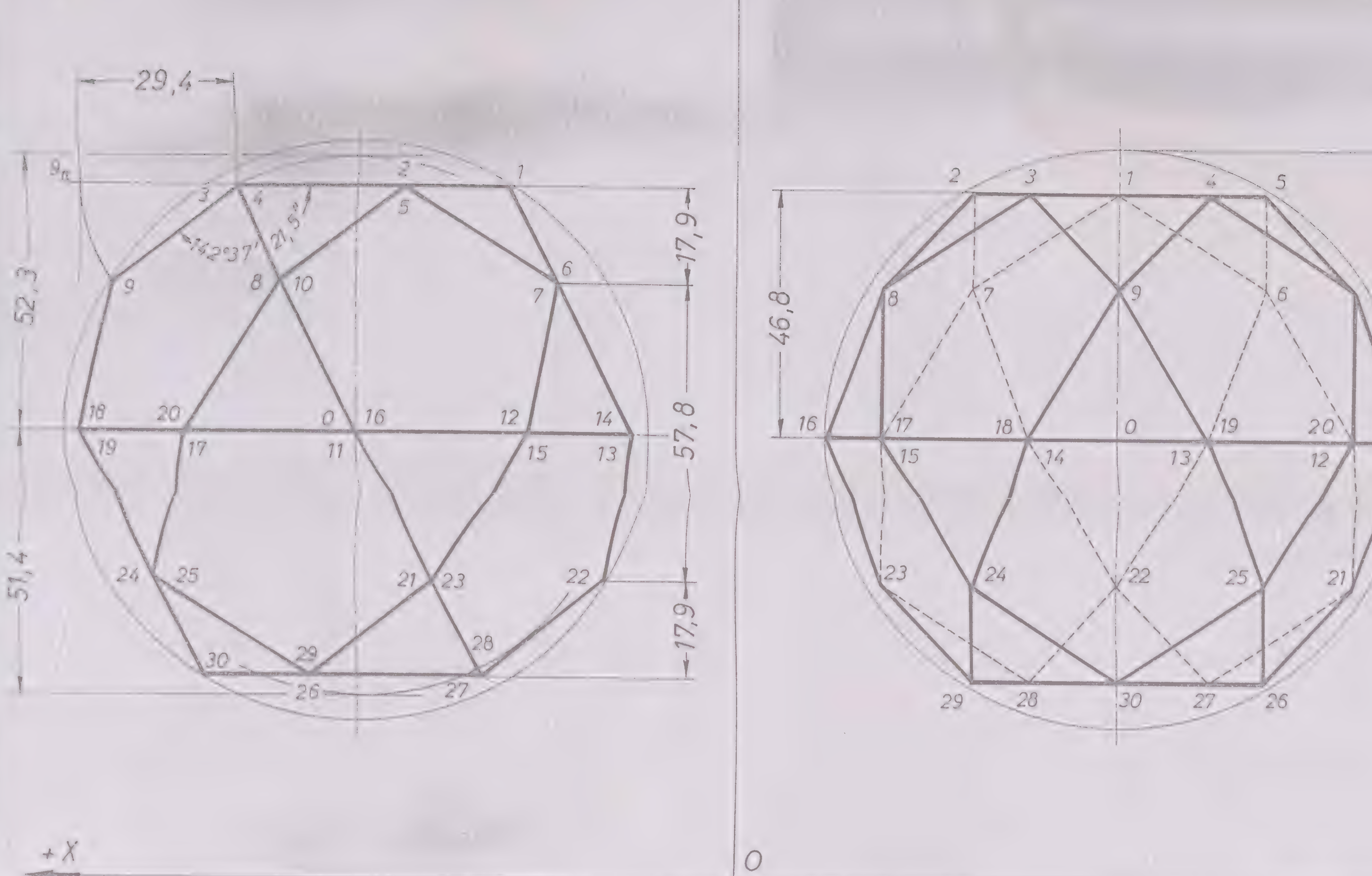
Para el caso del dibujo, r = 46.8 mm.

A continuación resumimos los valores anteriores.

CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell$	0, 86 60 25 .... ℓ
g	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 52^\circ\ 37'\ 21,5''$	0, 52 57 31 .... ℓ
f	$2\,(c_5 - g)$	1. 70 13 02 .... ℓ
r	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2}$	1, 37 63 82 .... ℓ





III

+Z

O

+Y

ARQUIMEDIANO IV

Número de caras triangulares .... $C_3 = 20$
Número de caras pentagonales .... $C_5 = 12$
Número de vértices .... $V = 30$
Número de aristas .... $A = 60$
Número de caras de un ángulo sólido: $2C_3 + 2C_5$

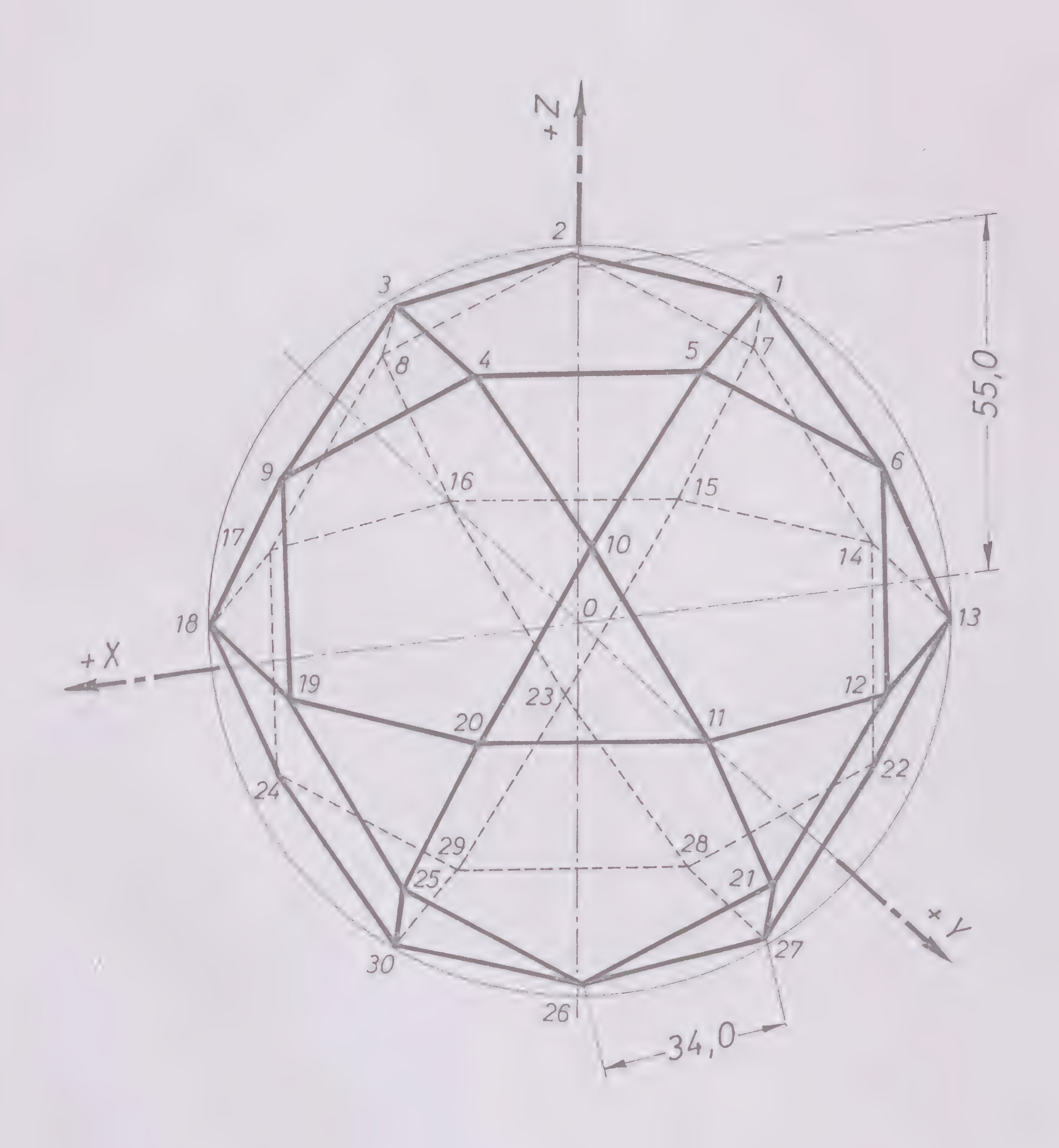
ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano IV, en el que en cada vértice concurren dos triángulos equiláteros y dos pentágonos regulares.

La longitud de su lado es de 34 milímetros y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso	
Fecha:							
Alumno:							
Escala 1 : 1	Arquimediano IV						Lámina 36 / Curso 19 -19



Arquimediano IV

Lámina 37	Poliedros arquimedianos Arquimediano V ($1 P_3 + 3 P_4$)	37

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano V en el que en cada vértice concurren tres cuadrados y un triángulo equilátero.

La longitud de su lado es 39.3 mm y las coordenadas de su centro O, son O (72, 72, 25) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 25) mm

$l_{\nabla} = 39,3$ mm

[illegible]		10 - 3 - 93



CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del arquimediano V (dato del ejercicio).

a = Radio de la esfera circunscrita.

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

c_4 = Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas.

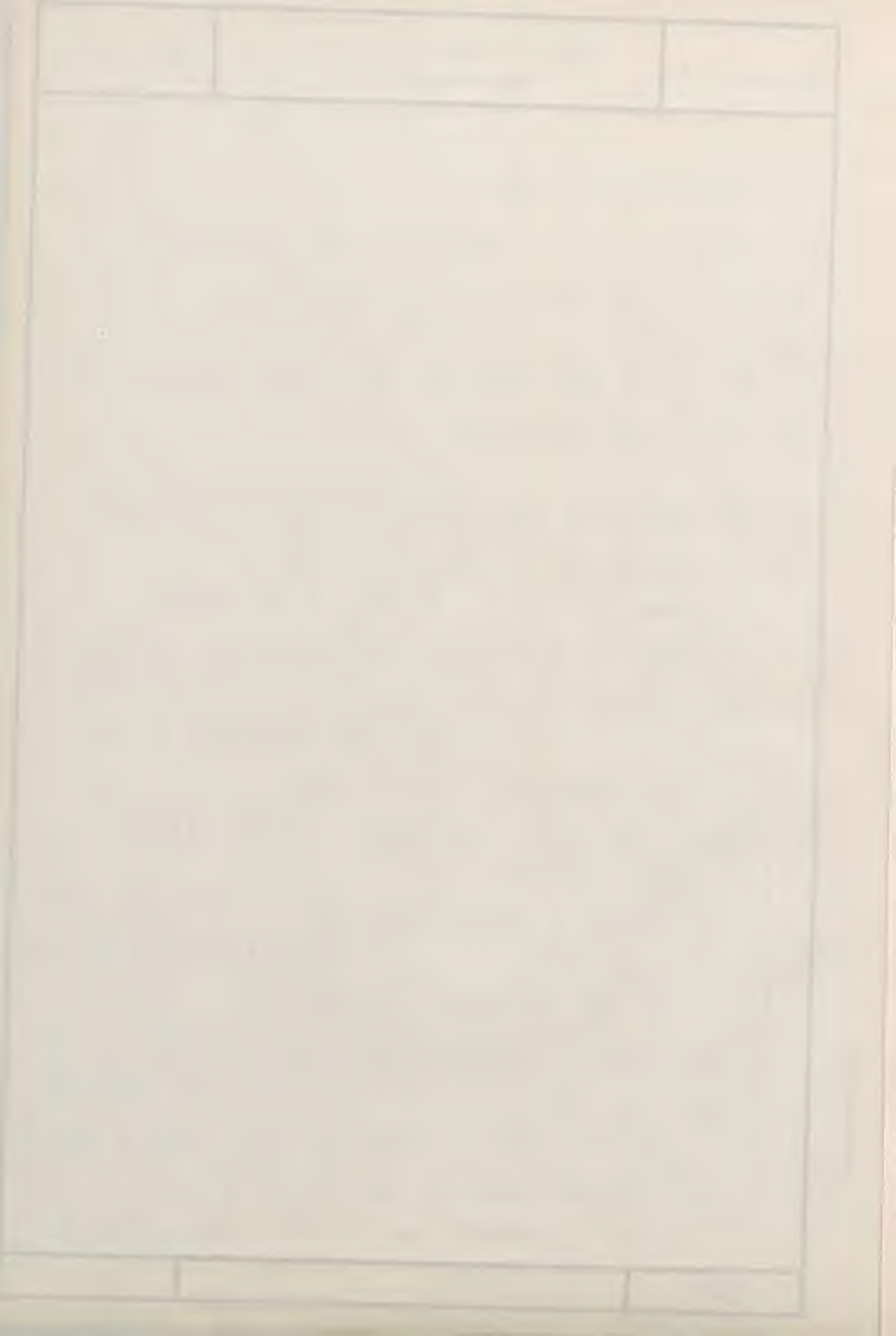
d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular.

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

α_4 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del ar-



quimediano que pasa por una arista de aquélla.

φ_{3-4} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra cuadrada.

φ_{4-4} = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras cuadradas.

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 8 caras triangulares regulares y de 18 caras cuadradas; 24 vértices y 48 aristas.

En cada vértice concurren 3 cuadrados y un triángulo equilátero, todos de lados "l" iguales; por consiguiente concurrirán también 4 aristas del arquimediano.

Así pues, tendremos que

ARQUIMEDIANO V $(1\,P_3 + 3\,P_4)$; $C_3 = 8$; $C_4 = 18$; $V = 24$; $A = 48$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio





Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas de un ángulo sólido.

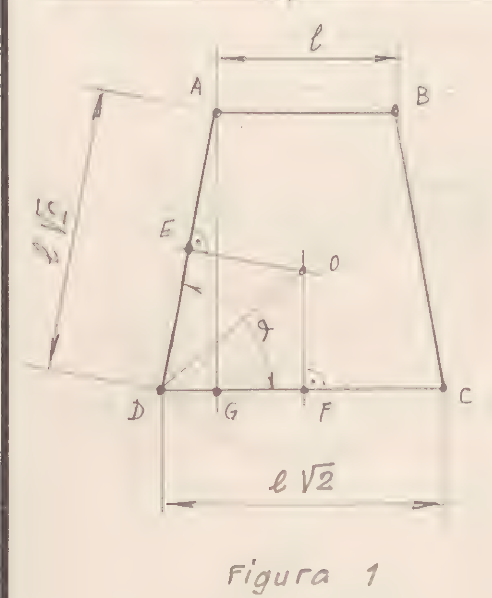


Figura 1

Este polígono es un trapecio isósceles A·B·C·D (fig. 1), cuya base menor AB es el lado "l" del arquimediano (lado de la cara triangular) y los otros tres lados AD, DC y CD, todos iguales, son las diagonales de las tres caras cuadradas que completan el ángulo sólido de dicho arquimediano.

Si trazamos por E y F, puntos medios respectivos de los lados AD y DC, perpendiculares a éstos, dichas perpendiculares se cortarán en un punto O, centro de la circunferencia circunscrita al trapecio A·B·C·D, y de radio OD = m. Trazando seguidamente por A, la perpendicular a DC, se nos formará el triángulo rectángulo ADG, recto en G; en éste se verificará que

$$DG = \frac{DC - AB}{2} = \frac{l\sqrt{2} - l}{2}$$ y tambien que

$$\boxed{\cos\alpha} = \frac{DG}{AD} = \frac{l\sqrt{2} - l}{2} : l\sqrt{2} = \frac{l\sqrt{2} - l}{2\sqrt{2}\, l} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

y sabiendo, por Trigonometría, que



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\alpha\right)} \qquad \text{se verificará}$$

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\alpha\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{4+2-\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6-\sqrt{2}}{2}}}$$

Pero en la figura 1, vemos que $OD = \dfrac{ED}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ y finalmente

$$\boxed{m} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{6-\sqrt{2}}{2}}}\,\ell = \sqrt{\frac{2}{\frac{6-\sqrt{2}}{2}}}\,\ell = \sqrt{\frac{4}{6-\sqrt{2}}}\,\ell =$$

$$= \boxed{2\times\sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{34}}\,\ell} = 0{,}93\;37\;48\;83\ldots\;\ell$$

(Véase al final de este estudio, otro proceso para la determinación del radio "m")

<u>Radio "a" de la esfera circunscrita</u>

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33), a este caso particular

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2-m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2-\left(2\sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{34}}\,\ell\right)^2}} = \frac{\ell}{2\sqrt{1-4\times\frac{6+\sqrt{2}}{34}}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{12+2\sqrt{2}}{17}}}\,\ell = \frac{1}{2\sqrt{\frac{17-12-2\sqrt{2}}{17}}}\,\ell = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{17}}}\,\ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{5-2\sqrt{2}}}\,\ell =$$

UNE A4 210 X 297



$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17\,(5+2\sqrt{2})}{17}}\;\ell = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\;\ell} = 1,39\;89\;66\;33\ldots\;\ell$$

(dibujo $a = 55$ mm) $\ell = 39,315$ mm

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas.

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}} \times \ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{4}}\;\ell = \boxed{\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\;\ell} = 1,30\;65\;62\;96\ldots\;\ell$$

(dibujo: $b = 51,3$ mm)

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\;\ell} = 0,57\;73\;50\;27\ldots\;\ell$$

(dibujo: $d_3 = 22,7$ mm)

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\;\ell} = 0,70\;71\;06\;78\ldots\;\ell$$

(en dibujo $d_4 = 27,8$ mm)



<u>Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"</u>

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\;\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}} \cdot \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+6\sqrt{2}-4}{12}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{11+6\sqrt{2}}{12}} \cdot \ell = \frac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}}\,\ell = \frac{\sqrt{\frac{18}{2}}+\sqrt{\frac{4}{2}}}{2\sqrt{3}}\,\ell =$$

$$= \frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\,\ell = \boxed{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}\,\ell} = 1{,}27\;42\;73\;69\;\ell$$

(en dibujo: $c_3 = 50{,}1$ mm)

<u>Radio "c_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "ℓ"</u>

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2 - (d_4)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\;\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}} \cdot \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}-2}{4}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4}}\,\ell = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2}\,\ell = \frac{\sqrt{\frac{4}{2}}+\sqrt{\frac{2}{2}}}{2}\,\ell = \boxed{\frac{\sqrt{2}+1}{2}\,\ell} =$$

$$= 1{,}20\;71\;06\;78\ldots\,\ell$$

(en dibujo: $c_4 = 47{,}5$ mm)

<u>Angulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquella.</u>



Se determina, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_3} = \frac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3\sqrt{4 \times \frac{1}{3} - 1}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{3}+\sqrt{6}) \times \sqrt{\frac{1}{3}}}{3 \times \frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt{3 \times \frac{1}{3}} + \sqrt{6 \times \frac{1}{3}}}{1} = \boxed{3+\sqrt{2}} = 4,41\ 42\ 13\ 56$$

$$lg\ tg\ \alpha_3 = 0,64\ 48\ 53\ 3 \qquad \boxed{\alpha_3 = 77^\circ\ 14'\ 8,2''}$$

Ángulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se determina, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_4} = \frac{2c_4}{\sqrt{4(d_4)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}+1}{2}\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4 \times \frac{1}{2} - 1}} = \boxed{\sqrt{2}+1} =$$

$$= 2,41\ 42\ 13\ 56\ldots$$

$$lg\ tg\ \alpha_4 = 0,382\ 77\ 57 \qquad \boxed{\alpha_4 = 67^\circ\ 30'\ 00''}$$

Ángulo rectilíneo "φ_{3-4}" del diedro formado por una cara triangular regular y una cuadrada



Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{3-4}} = \alpha_3 + \alpha_4 = 77^\circ\ 14'\ 8{,}2'' + 67^\circ\ 30'\ 00'' = \boxed{144^\circ\ 44'\ 8{,}2''}$$

Ángulo rectilíneo "φ_{4-4}" del diedro formado por dos caras cuadradas.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{4-4}} = 2\,\alpha_4 = 2 \times 67^\circ\ 30' = \boxed{135^\circ}$$

Obsérvese que este valor es el del ángulo que forman dos lados consecutivos de un octógono regular, y en efecto, la proyección del arquimediano, en el plano III, es un octógono regular de lado "l".

Área lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de 8 caras triangulares regulares y de 18 caras cuadradas, ambas de lado "l"; la superficie será pues:

$$\boxed{S} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\, l^2 + 18\, l^2 = \left(2\sqrt{3} + 18\right) l^2 = \boxed{2\left(\sqrt{3} + 9\right) l^2} =$$

$$= 21{,}46\ 41\ 01\ 62 \ldots\ l^2$$

UNE A4 210 X 297



Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 8 pirámides de base triangular y altura "c_3" y de 18 pirámides de base cuadrada y altura "c_4"; su valor será:

$$\boxed{V} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \, l^2 \times \frac{c_3}{3} + 18 \times l^2 \times \frac{c_4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6} \, l^3 + 6 \times \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \, l^3 =$$

$$= \left(\frac{18 + 2\sqrt{18}}{18} + 3\left(\sqrt{2} + 1\right) \right) l^3 = \left(\frac{3 + \sqrt{2}}{3} + \left(3\sqrt{2} + 3\right) \right) l^3 = \frac{3 + \sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9}{3} \, l^3 =$$

$$= \boxed{\frac{12 + 10\sqrt{2}}{3} \, l^3} = 8.71\,40\,45\,21 \ldots \, l^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 8 triángulos equiláteros de lado 39.3 mm. y de 18 cuadrados de igual lado, de forma que en cada vértice concurran 3 cuadrados y 1 triángulo.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación resumimos los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

UNE A4 210 X 297



CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\ \ell$	$1.39\ 89\ 66 \ldots \ell$
b	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\ \ell$	$1.30\ 65\ 63 \ldots \ell$
C_3	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}\ \ell$	$1.27\ 42\ 74 \ldots \ell$
C_4	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}\ \ell$	$1.20\ 71\ 07 \ldots \ell$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	$0.57\ 73\ 50 \ldots \ell$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	$0.70\ 71\ 07 \ldots \ell$
m	$2\sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{34}}\ \ell$	$0.93\ 39\ 49 \ldots \ell$
α_3	$tg\ \alpha_3 = 3+\sqrt{2}$	$tg\ \alpha_3 = 4.41\ 42\ 14 \ldots$ $\alpha_3 = 77^\circ\ 14'\ 8.2''$
α_4	$tg\ \alpha_4 = 1+\sqrt{2}$	$tg\ \alpha_4 = 2.41\ 42\ 14 \ldots$ $\alpha_4 = 67^\circ\ 30'$
φ_{3-4}	$\alpha_3 + \alpha_4$	$\varphi_{3-4} = 144^\circ\ 44'\ 8.2''$
φ_{4-4}	$2\ \alpha_4$	$\varphi_{4-4} = 135^\circ$
S	$2(\sqrt{3}+9)\ \ell^2$	$21.46\ 41\ 02 \ldots \ell^2$
V	$\frac{12+10\sqrt{2}}{3}\ \ell^3$	$8.71\ 40\ 15 \ldots \ell^3$

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 37, a la representación gráfica del Arquimediano V.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores y de procesos gráficos.



Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_V = Dato del ejercicio = 39,3 mm

a = 1,39 87 66... × 39,3 = 55,0 mm

b = 1,30 65 63... × 39,3 = 51,3 mm

c_3 = 1,27 42 74... × 39,3 = 50,1 mm

c_4 = 1,20 71 07... × 39,3 = 47,5 mm

d_3 = 0,57 73 50... × 39,3 = 22,7 mm

d_4 = 0,70 71 07... × 39,3 = 27,8 mm

El orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 37), es el siguiente:

1º Situar el centro O, de coordenadas O(72, 72, 85) mm.

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio a = 55,0 mm.

3º Representar en I, II y III las cara cuadradas superior 1 al 4, e inferior 21 al 24, supuesto el poliedro colocado con dichas caras paralelas a II, y un lado perpendicular a I (utilícese la cota "c_4" en I y III).

4º Obtener en I las proyecciones del vértice 6 de la cara contigua triangular, de arista 2-3, hasta colocar el vértice 6 sobre la esfera circunscrita. Para ello se hará centro en 3_I, con radio igual a la altura "h" de la cara 6-2-3 (dibújese previamente en II) y se



trazará un arco que corte en 6_I a la esfera circunscrita.

5º Repítase la operación anterior para los vértices 5, 19 y 20; obténganse seguidamente las proyecciones de los cuatro vértices anteriores, sobre II y III.

6º La determinación de los restantes vértices del poliedro, en I, II y III, es inmediata y no necesita explicación.

Obsérvese que el contorno aparente de la proyección III, es un octógono regular de lado "l", y que las proyecciones del poliedro en I y II, son iguales, aun cuando no sea coincidente la numeración de vértices en ambas.

Debido a la propiedad enunciada anteriormente, de ser el contorno de la proyección III del arquimediano, un octógono regular de lado "l", puede comprobarse el cálculo de "b", igual al radio de la circunferencia circunscrita, y el de "c_4", igual al de la inscrita.

En efecto, tendremos que el ángulo central de un lado del octógono regular, valdrá:

$$\alpha_0 = \frac{360}{8} = 45º$$

y por lo tanto

$$\boxed{b} = \frac{l}{2} : \operatorname{sen} \frac{\alpha_0}{2} = \frac{l}{2\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha_0}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}}\, l = \sqrt{\frac{1}{2 \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}\, l =$$



$$= \sqrt{\frac{1}{2 \times \frac{2-\sqrt{2}}{2}}}\ \ell = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}\ \ell = \boxed{\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\ \ell}$$

y por otra parte

$$\boxed{c_4} = \frac{\ell}{2} : tg\ \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\ell}{2 \times \frac{1-\cos\alpha_0}{\operatorname{sen}\alpha_0}} = \frac{1}{2 \times \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\ \ell = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2-\sqrt{2}}\ \ell =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2})}{2 \times (4-2)}\ell = \frac{2\sqrt{2}+2}{4}\ \ell = \boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\ \ell}$$

valores ambos coincidentes con los ya calculados.

UNE A4 210 X 297



El cálculo que se incluye a continuación, para la determinación del radio "m" del Arquimediano V, fué el que seguimos primeramente tomando como punto de partida el vértice A.

Como puede verse es mucho más laborioso que el seguido al tomar el vértice D, en el que el radio OD es bisectriz del ángulo D, cosa que no ocurre ~~en~~ con el radio OA. ~~que no es bisectriz del ángulo A. Pues es.~~

El resultado final es coincidente en ambos procesos, como lógicamente debía suceder.

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas de un ángulo sólido.

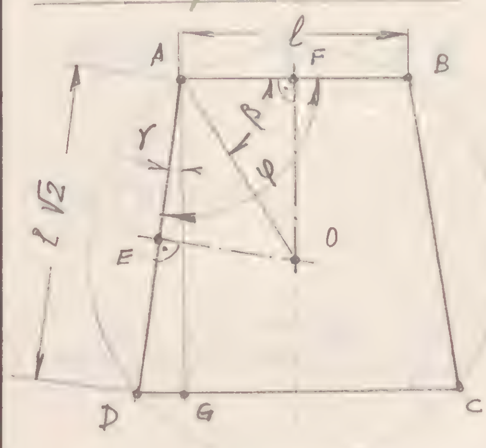


Figura 1

Este polígono es un trapecio isósceles (figura 1), cuya base menor AB es el lado "l" del arquimediano (lado de las caras triangulares, y los otros tres lados (BC = CD = DA), todos iguales, son diagonales de las tres caras cuadradas que junto con la triangular, concurren en cualquier ángulo sólido de dicho arquimediano.

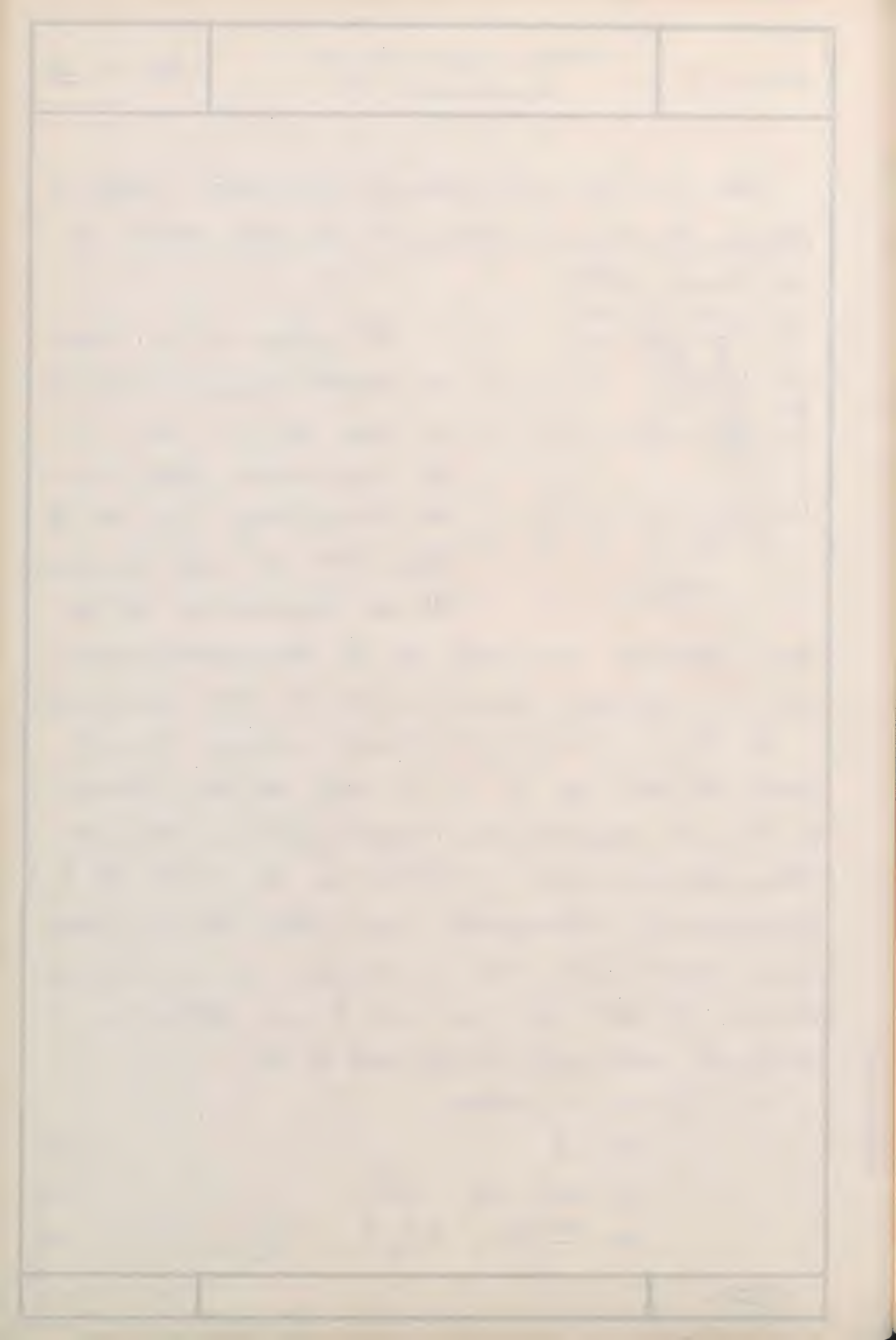
Sea (fig. 1), A·B·C·D, el trapecio isósceles; E punto medio del lado AD, y F el medio del AB. Tracemos por E y F, perpendiculares respectivamente a DA y AB; dichas perpendiculares se cortarán en O, centro de la circunferencia circunscrita, cuyo radio OA = m, queremos determinar. Tracemos tambien por A, la perpendicular al lado DC, cuyo pie G nos determina el triángulo rectángulo A·D·G, recto en G.

De la figura se deduce:

$$AB = l \qquad [1]$$

$$BC = DC = DA = l\sqrt{2} \qquad [2]$$

$$DG = \frac{DC - AB}{2} = \frac{l\sqrt{2} - l}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}\, l \qquad [3]$$



de la [3] y [2], se deduce:

$$\boxed{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{DG}{DA} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\,\ell \; ; \; \ell\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{2}-1)\,\ell}{2\sqrt{2}\,\ell} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \qquad [4]$$

y siendo $\varphi = \gamma + \frac{\pi}{2}$ será $\cos\varphi = -\operatorname{sen}\gamma$, por lo que

$$\boxed{\cos\varphi} = -\operatorname{sen}\gamma = -\frac{2-\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-2}{4}} \qquad \text{y por lo tanto} \qquad [5]$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\varphi} = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}-2}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{2+4-4\sqrt{2}}{16}} = \sqrt{1-\frac{6-4\sqrt{2}}{16}} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{8}} = \sqrt{\frac{8-3+2\sqrt{2}}{8}} = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{8}}} \qquad [6]$$

De la figura se deduce:

$$AO = \boxed{m} = \frac{AF}{\cos\beta} = \boxed{\frac{\ell}{2\cos\beta}} \qquad [7]$$

y también

$$AO = \boxed{m} = \frac{AE}{\cos(\varphi-\beta)} = \boxed{\frac{\ell\sqrt{2}}{2\cos(\varphi-\beta)}} \qquad [8]$$

De la [7] y [8]

$$\frac{\ell}{2\cos\beta} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2\cos(\varphi-\beta)} \quad ;; \quad \cos(\varphi-\beta) = \sqrt{2}\cos\beta \quad ;;$$

$$\cos\varphi\cos\beta - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\beta = \sqrt{2}\cos\beta \; ;;$$

$$\cos\varphi\cos\beta - \operatorname{sen}\varphi\sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{2}\cos\beta \qquad [9]$$

si hacemos en [9] $\cos\beta = x$; $\cos\varphi = p$; $\operatorname{sen}\varphi = q$

tendremos:



$$p\,x - q\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}\,x \quad ;; \quad (p-\sqrt{2})\,x = q\sqrt{1-x^2} \;;$$

$$p-\sqrt{2} = q\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} \quad ;; \quad \frac{p-\sqrt{2}}{q} = \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \quad ;; \quad \left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 = \frac{1}{x^2}-1 \;;$$

$$\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} \quad ;; \quad x^2 = \frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}$$ de donde.

$$x = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}} = \cos\beta \qquad [10]$$

valor que sustituido en [7], nos da

$$\boxed{m} = \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}}}\,\ell = \sqrt{\frac{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}{4}} \times \ell =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1} \times \ell} \qquad [11]$$

sustituyendo en ésta los valores $p = \cos\varphi$; $q = \operatorname{sen}\varphi$, obtenidos en [5] y [6], tendremos:

$$\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-2}{4} - \sqrt{2}\right)^2 : \frac{5+2\sqrt{2}}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}-2-4\sqrt{2}}{4}\right)^2 : \frac{5+2\sqrt{2}}{8} =$$

$$= \frac{-(3\sqrt{2}+2)^2}{16} : \frac{5+2\sqrt{2}}{8} = \frac{18+4+12\sqrt{2}}{16} : \frac{5+2\sqrt{2}}{8} =$$

$$= \frac{22+12\sqrt{2}}{16} : \frac{10+4\sqrt{2}}{16} = \frac{22+12\sqrt{2}}{10+4\sqrt{2}} = \frac{11+6\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}} = \frac{(11+6\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}{17} =$$



$$= \frac{55 + 30\sqrt{2} - 22\sqrt{2} - 24}{17} = \frac{31 + 8\sqrt{2}}{17}$$ y de aquí:

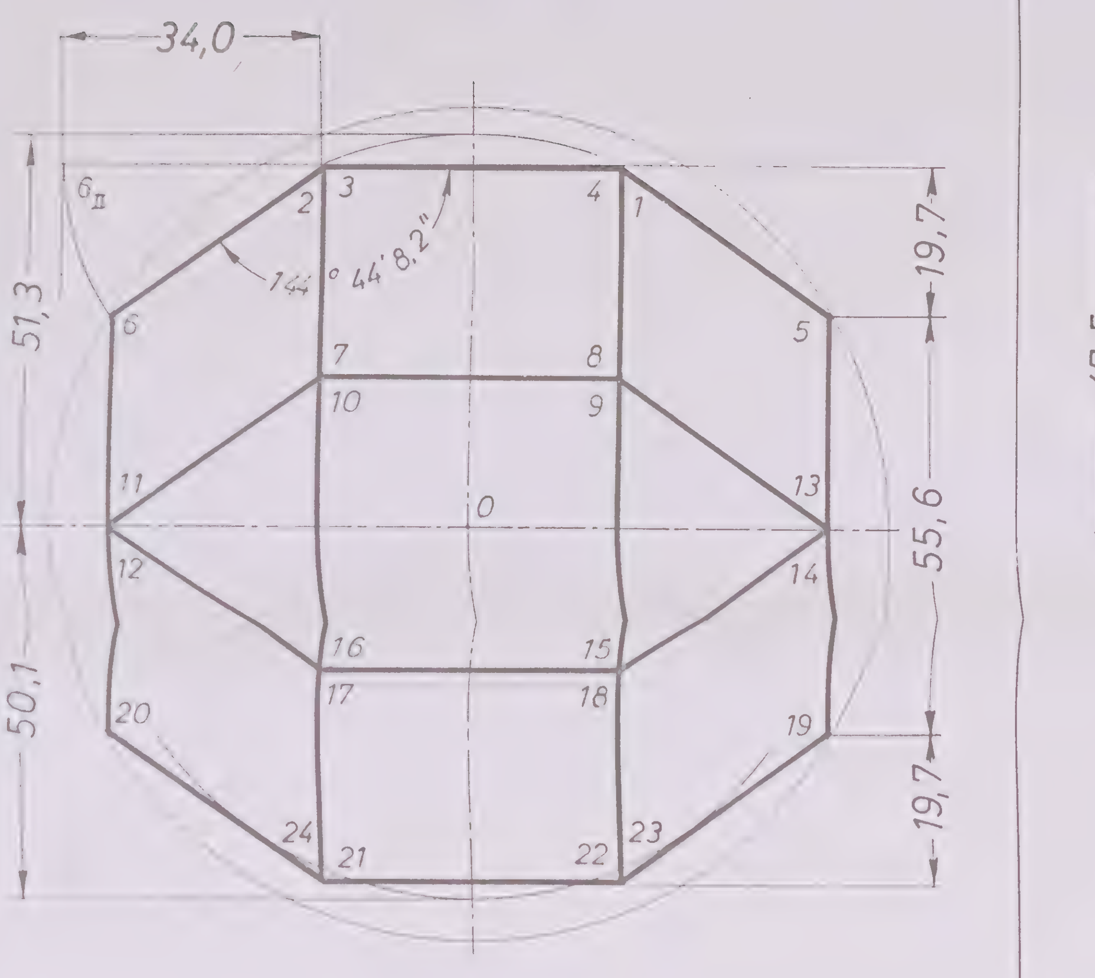
$$\boxed{m} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p - \sqrt{2}}{7}\right)^2 + 1} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{31 + 8\sqrt{2}}{17} + 1} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{31 + 8\sqrt{2} + 17}{17}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{48 + 8\sqrt{2}}{4 \times 17}}\, l = \sqrt{\frac{24 + 4\sqrt{2}}{34}} \times l = \sqrt{\frac{4(6 + \sqrt{2})}{34}}\, l = \boxed{2\sqrt{\frac{6 + \sqrt{2}}{34}} \times l}$$

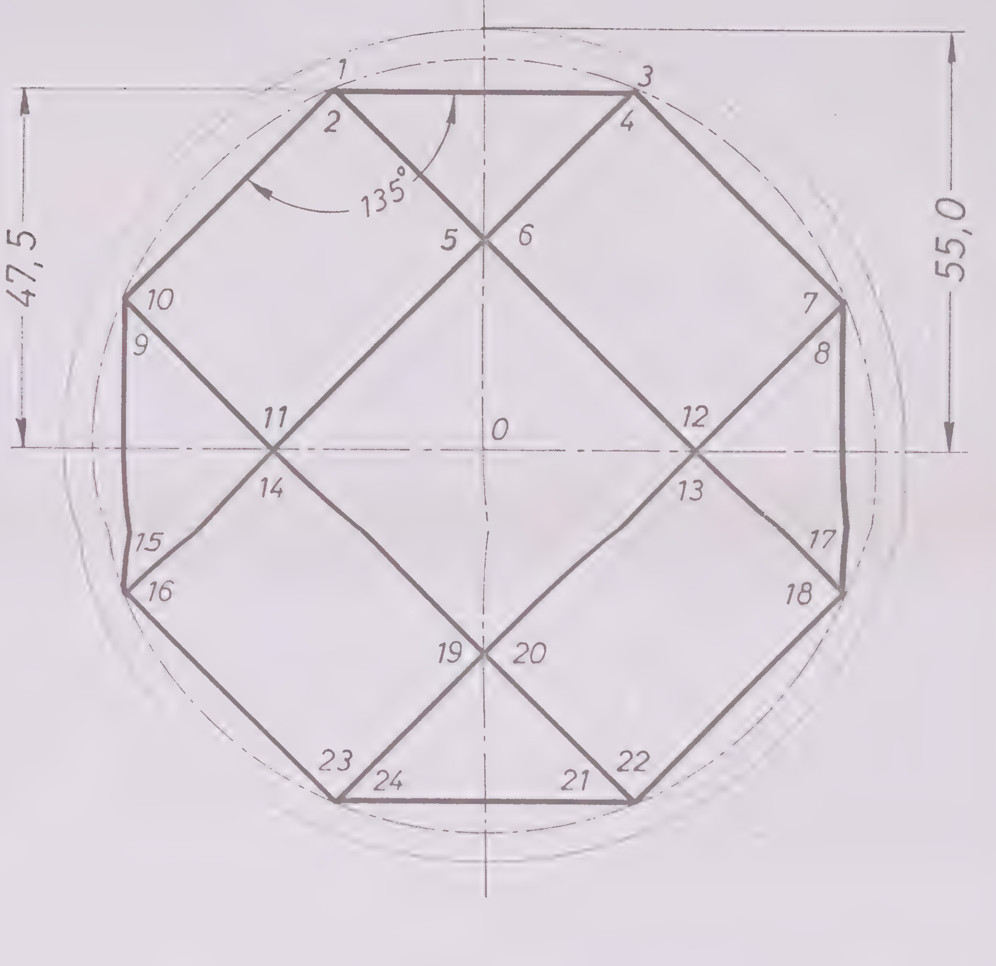
$$= 0{,}93\,39\,48\,83 \ldots\, l$$



I



III



+Z

+X

O

+Y

II

39,3

+Y

ARQUIMEDIANO V

Número de caras triangulares	$C_3 = 8$
Número de caras cuadradas	$C_4 = 18$
Número de vértices	V = 24
Número de aristas	A = 48
Número de caras de un ángulo sólido:	$1\ C_3 + 3\ C_4$

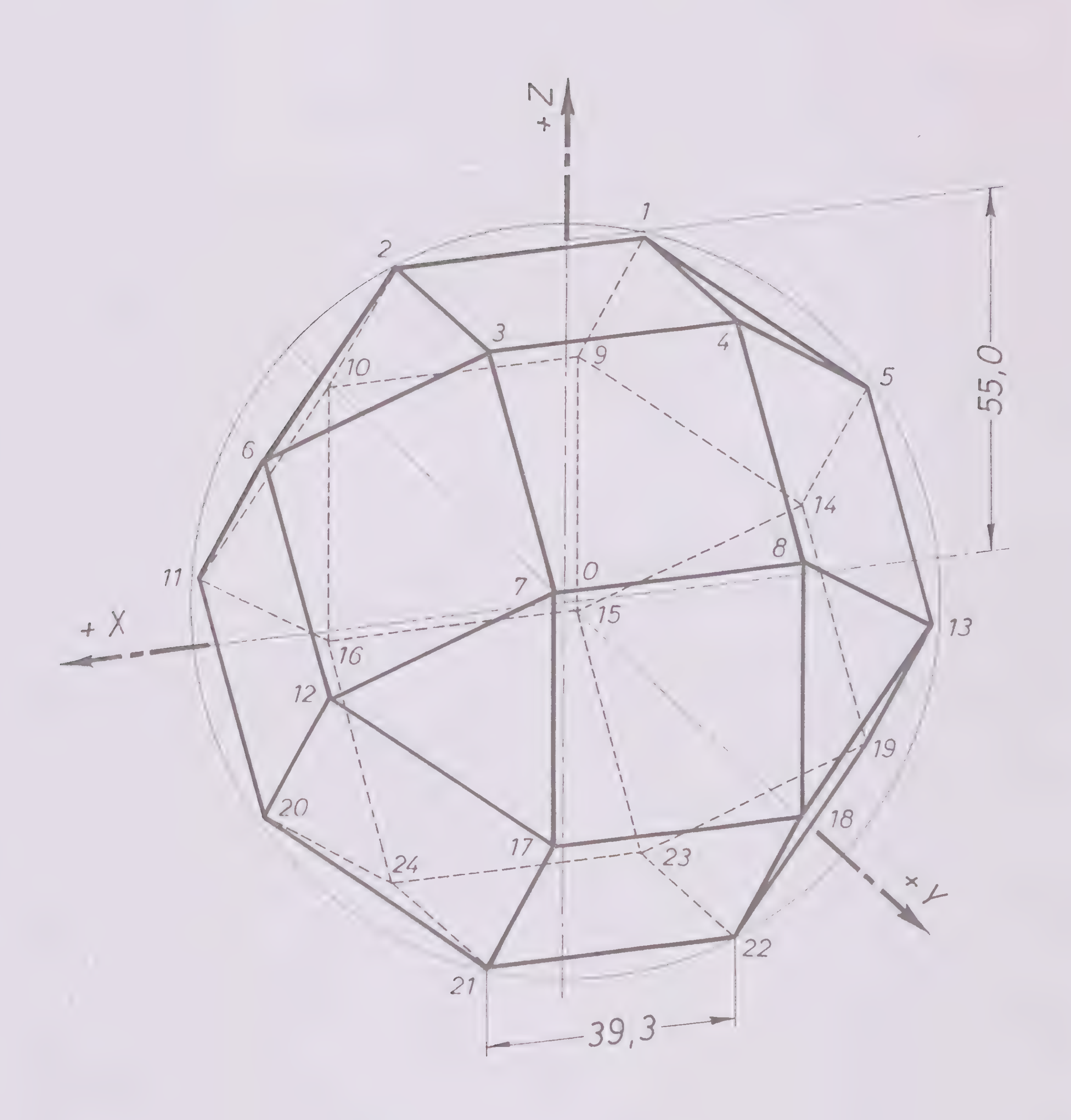
ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arqumediano V, en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero y tres cuadrados.

La longitud de su lado es de 39,3 milímetros y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano V					Lámina 37 Curso 19 -19



Arquimediano V

Lámina IV	Poliedros arquimedianos Arquimediano VI $(1P_3 + 2P_4 + 1P_5)$	38

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano VI en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero, dos cuadrados y un pentágono regular.

La longitud de su lado es de 24.6 mm y las coordenadas de su centro O, son (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS   O (72, 72, 85) mm

l_{VI} = 24.6 mm

UNE A4 210 X 297

		31-3-73



CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del arquimediano VI (dato del ejercicio)

a = Radio de la esfera circunscrita.

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

c_4 = Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas.

c_5 = Radio de la esfera tangente a las caras pentagonales.

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

d_5 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimedia-



no, que pasa por una arista de aquélla.

α_4 = Angulo rectilíneo del ~~del~~ diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

α_5 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara pentagonal, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

φ_{3-4} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra cuadrada

φ_{4-5} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara cuadrada y otra pentagonal.

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 20 caras triangulares, 30 caras cuadradas y 12 pentagonales, todas regulares; 60 vértices y 120 aristas.

En cada vértice concurren, un triángulo; dos cuadrados y un pentágono, en el orden siguiente $P_3 - P_4 - P_5 - P_4$, es decir, las caras cuadradas no son consecutivas; por consiguiente concurrirán también 4 aristas del arquimediano.

Así pues, tendremos que





ARQUIMEDIANO VI $(1P_3 + 2P_4 + 1P_5)$; $C_3 = 20$; $C_4 = 30$; $C_5 = 12$; $V = 60$; $A = 120$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas que concurren en un ángulo sólido.

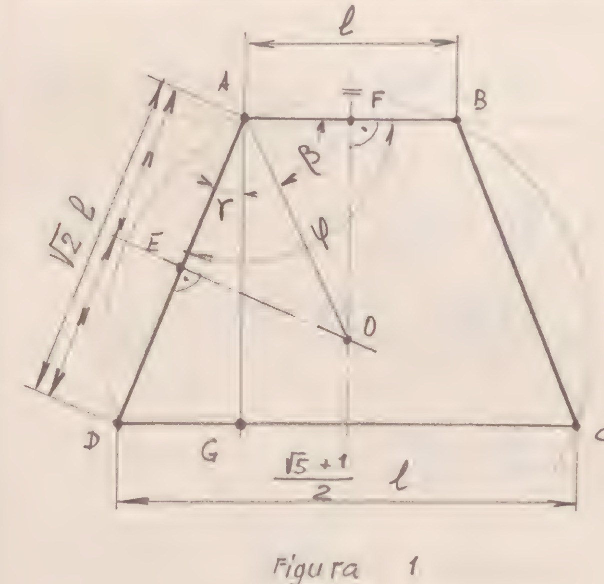


Figura 1

Este polígono es un trapecio A-B-C-D (fig. 1) isósceles, cuya base menor AB es el lado "l" del arquimediano (lado de la cara triangular); la base mayor DC es la diagonal de la cara pentagonal de lado "l"; los lados no paralelos AD y BC, ambos iguales, son a su vez las diagonales de las dos caras cuadradas.

Por Geometría se sabe que la diagonal de un cuadrado de lado "l", es $AD = BC = \sqrt{2}\, l$



y que la diagonal de un pentágono regular de lado "l" es

$$DC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l$$

Si en la figura 1, trazamos por E y F, puntos medios de los lados AD y AB, perpendiculares a estos lados, ambas se cortarán en O, centro de la circunferencia circunscrita al trapecio isósceles A-B-C-D; uniendo O con A, el segmento OA será el radio "m" de dicha circunferencia. Tracemos también por A, la perpendicular al lado DC, cuyo pie G nos determina el triángulo rectángulo A-D-G, recto en G.

De la figura se deduce:

$$AB = l \qquad [1]$$

$$AD = BC = \sqrt{2}\, l \qquad [2]$$

$$DC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l \qquad [3]$$

$$DG = \frac{DC - AB}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l - l\right) : 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1\right) l =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\, l \qquad [4]$$

de [3] y [2] se deduce

$$\boxed{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{DG}{DA} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\, l : \sqrt{2}\, l = \frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{8}} \qquad [5]$$

y siendo $\varphi = \gamma + \frac{\pi}{2}$ será $\cos\varphi = -\operatorname{sen}\gamma$, por lo que

$$\boxed{\cos\varphi} = -\operatorname{sen}\varphi = -\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{8} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}} \quad \text{y por lo tanto} \qquad [6]$$



$$\boxed{\operatorname{sen}\varphi} = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{2+10-2\sqrt{20}}{64}} = \sqrt{\frac{64-12+4\sqrt{5}}{64}} =$$

$$= \sqrt{\frac{52+4\sqrt{5}}{64}} = \sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{13+\sqrt{5}}}{4}} \qquad [7]$$

De la figura se deduce:

$$AO = \boxed{m} = \frac{AF}{\cos\beta} = \boxed{\frac{\ell}{2\cos\beta}} \quad \text{y también} \qquad [8]$$

$$AO = \boxed{m} = \frac{AE}{\cos(\varphi-\beta)} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2\cos(\varphi-\beta)}} \qquad [9]$$

De [8] y [9]

$$\frac{\ell}{2\cos\beta} = \frac{\sqrt{2}\,\ell}{2\cos(\varphi-\beta)} \quad ;; \quad \cos(\varphi-\beta) = \sqrt{2}\cos\beta \quad ;;$$

$$\cos\varphi\cos\beta - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\beta = \sqrt{2}\cos\beta \quad ;;$$

$$\cos\varphi\cos\beta - \operatorname{sen}\varphi\sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{2}\cos\beta \quad ;; \qquad [10]$$

si hacemos en [10] $\cos\beta = x$; $\cos\varphi = p$; $\operatorname{sen}\varphi = q$

tendremos:

$$p\,x - q\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}\,x \quad ;; \quad (p-\sqrt{2})\,x = q\sqrt{1-x^2} \quad ;;$$

$$p-\sqrt{2} = q\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} \quad ;; \quad \frac{p-\sqrt{2}}{q} = \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \quad ;; \quad \left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 = \frac{1}{x^2}-1$$

$$\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} \quad ;; \quad x^2 = \frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1} \quad ;; \text{ y de aquí:}$$

UNE A4 210 X 297



$$x = \cos\beta = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}} \qquad [11]$$

valor que sustituido en [8] nos da

$$\boxed{m} = \frac{l}{2\cos\beta} = \frac{l}{2\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}{4}} \times l = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1} \times l} \qquad [12]$$

sustituyendo en [12] el valor de $p = \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}$, obtenido en [6], y el de $q = \operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{13+\sqrt{5}}}{4}$ obtenido en [7], tendremos finalmente:

$$\boxed{m} = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8} - \sqrt{2}\right) : \frac{\sqrt{13+\sqrt{5}}}{4}\right]^2 + 1} \times l =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}-8\sqrt{2}}{8} : \frac{\sqrt{13+\sqrt{5}}}{4}\right]^2+1} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13+\sqrt{5}}}{4}\right)^2+1} \times l$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{13+\sqrt{5}}}\right)^2+1} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(7\sqrt{2}+\sqrt{10})^2}{4(13+\sqrt{5})}+1} \times l =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{98+10+14\sqrt{20}}{4(13+\sqrt{5})}+1} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{108+28\sqrt{5}}{4(13+\sqrt{5})}+1} \times l =$$

UNE A4 210 X 297



$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27+7\sqrt{5}}{13+\sqrt{5}}+1}\times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27+7\sqrt{5}+13+\sqrt{5}}{13+\sqrt{5}}}\, l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{40+8\sqrt{5}}{13+\sqrt{5}}}\times l =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\,(5+\sqrt{5})}{13+\sqrt{5}}}\times l = \sqrt{\frac{2\,(5+\sqrt{5})}{13+\sqrt{5}}}\times l = \sqrt{\frac{2\,(5+\sqrt{5})\,(13-\sqrt{5})}{13^2-5}}\times l =$$

$$= \sqrt{\frac{2\,(65+13\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5)}{164}}\times l = \sqrt{\frac{60+8\sqrt{5}}{82}}\times l = \boxed{\sqrt{\frac{30+4\sqrt{5}}{41}}\times l} =$$

$$= 0{,}97\ 46\ 07\ 76\ldots\ l$$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33), a este caso particular

$$\boxed{a} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2-m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2-\left(\sqrt{\frac{30+4\sqrt{5}}{41}}\,l\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{30+4\sqrt{5}}{41}}}\times l =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{41-30-4\sqrt{5}}{41}}}\times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{41}{11-4\sqrt{5}}}\times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{41\,(11+4\sqrt{5})}{11^2-16\times 5}}\, l =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{41\,(11+4\sqrt{5})}{41}}\, l = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\times l} = 2{,}23\ 29\ 50\ 5\ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, $a = 55{,}0$ mm. de donde

$l = 24{,}631$ mm.



Radio "b" de la esfera tangente a las aristas.

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\cdot l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}}\cdot l =$$

$$= \sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}}{4}}\, l = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{10+4\sqrt{5}}\cdot l} = 2.17\,62\,50\,90\ldots\, l$$

(en dibujo: b = 53.6 mm)

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular de lado "l"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l} = 0.57\,73\,50\,27\ldots\, l$$

(en dibujo: d_3 = 14.2 mm)

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada de lado "l"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l} = 0.70\,71\,06\,78\ldots\, l$$

(en dibujo: d_4 = 17.4 mm).

Radio "d_5" de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal regular de lado "l"



La demuestra en Geometría es

$$\boxed{d_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell} = 0{,}85\,06\,50\,8\ldots\,\ell$$

(en dibujo: $d_5 = 21{,}0$ mm)

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2-(d_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\,\ell\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{3}}\cdot\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{33+12\sqrt{5}-4}{12}}\cdot\ell = \sqrt{\frac{29+12\sqrt{5}}{12}}\,\ell = \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}\,\ell = \frac{\sqrt{\frac{40}{2}}+\sqrt{\frac{18}{2}}}{2\sqrt{3}}\,\ell =$$

$$= \frac{\sqrt{20}+\sqrt{9}}{2\sqrt{3}}\,\ell = \frac{2\sqrt{5}+3}{2\sqrt{3}}\,\ell = \boxed{\frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{6}\,\ell} = 2{,}15\,70\,19\,85\ldots\,\ell$$

(en dibujo: 53,1 mm.)

Radio "c_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2-(d_4)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\,\ell\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4}-\frac{2}{4}}\cdot\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{4}}\,\ell = \frac{1}{2}\sqrt{9+4\sqrt{5}}\,\ell = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{10}{2}}+\sqrt{\frac{8}{2}}\right)\ell = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+2\right)\ell =$$

UNE A4 210 X 297



$$= \boxed{\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\ell} = 2,11\,80\,33\,99\ldots\,\ell$$

(en dibujo: $c_4 = 52,2$ mm)

Radio "c_5" de la esfera tangente a las caras pentagonales regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2], (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_5} = \sqrt{a^2-(d_5)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\,\ell\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4}-\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{55+20\sqrt{5}-10-2\sqrt{5}}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{45+18\sqrt{5}}{20}}\,\ell = \sqrt{\frac{9\,(5+2\sqrt{5})}{20}}\,\ell = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell} =$$

$$= 2,06\,45\,72\,9\ldots\,\ell$$

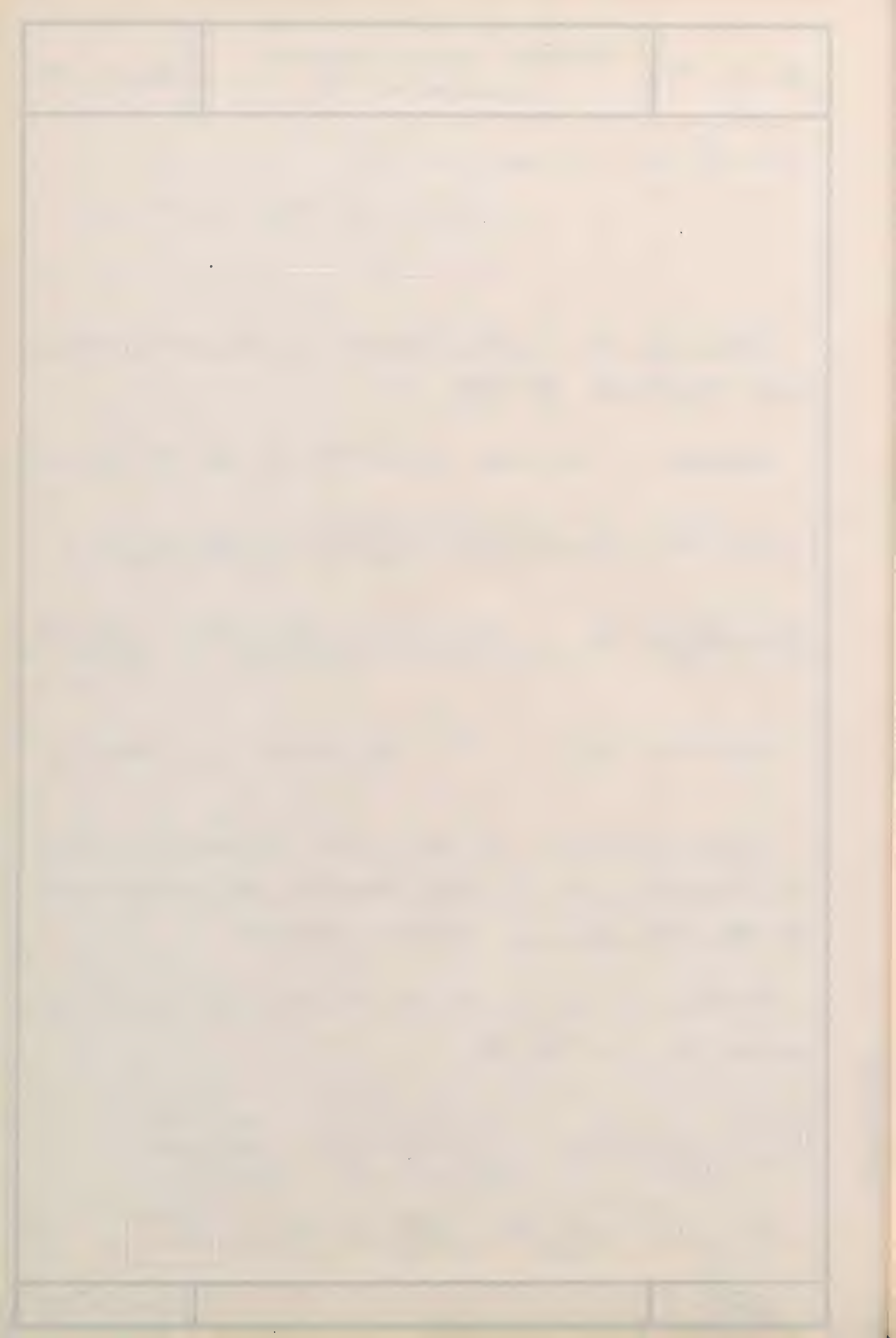
(en dibujo: $c_5 = 50,8$ mm)

Ángulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33)

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{2\,c_3}{\sqrt{4\,(d_3)^2-\ell^2}} = \frac{2 \times \frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{6}\,\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell\right)^2-\ell^2}} = \frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{3\sqrt{4\times\frac{1}{3}-1}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{3\times\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{45}+9}{3} = \frac{6\sqrt{5}+9}{3} = \boxed{2\sqrt{5}+3} =$$



$= 7,\ 47\ 21\ 35\ 95 \ldots$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_3 = 0,\ 87\ 34\ 44\ 8$ $\qquad \boxed{\alpha_3 = 82^\circ\ 22'\ 38,5''}$

Angulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33)

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_4} = \frac{2\ c_4}{\sqrt{4\,(d_4)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{4 \times \frac{2}{4} - 1}} = \boxed{2 + \sqrt{5}} =$$

$= 4,\ 23\ 60\ 67\ 98 \ldots$

$\lg 4,\ 23\ 60\ 67\ 98 \ldots = 0,\ 62\ 69\ 62\ 9$ $\qquad \boxed{\alpha_4 = 76^\circ\ 43'\ 2,9''}$

Angulo rectilíneo "α_5" del diedro formado por una cara pentagonal regular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33)

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_5} = \frac{2\ c_5}{\sqrt{4\,(d_5)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\ \ell}{\sqrt{4\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{3\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{4 \times \frac{5 + \sqrt{5}}{10} - 1}} =$$



$$= \frac{3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}-1}} = \frac{3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}} = \boxed{3}$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_5 = 0,477\,121\,3\ldots$ $\qquad \boxed{\alpha_5 = 71°\ 33'\ 54,2''}$

Angulo rectilineo φ_{3-4} del diedro formado por una cara triangular regular y una cuadrada

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{3-4}} = \alpha_3 + \alpha_4 = 82°\ 22'\ 38,5'' + 76°\ 43'\ 2,9'' =$$

$$= \boxed{159°\ 5'\ 41,4''}$$

Angulo rectilineo φ_{4-5} del diedro formado por una cara cuadrada y una pentagonal regular.

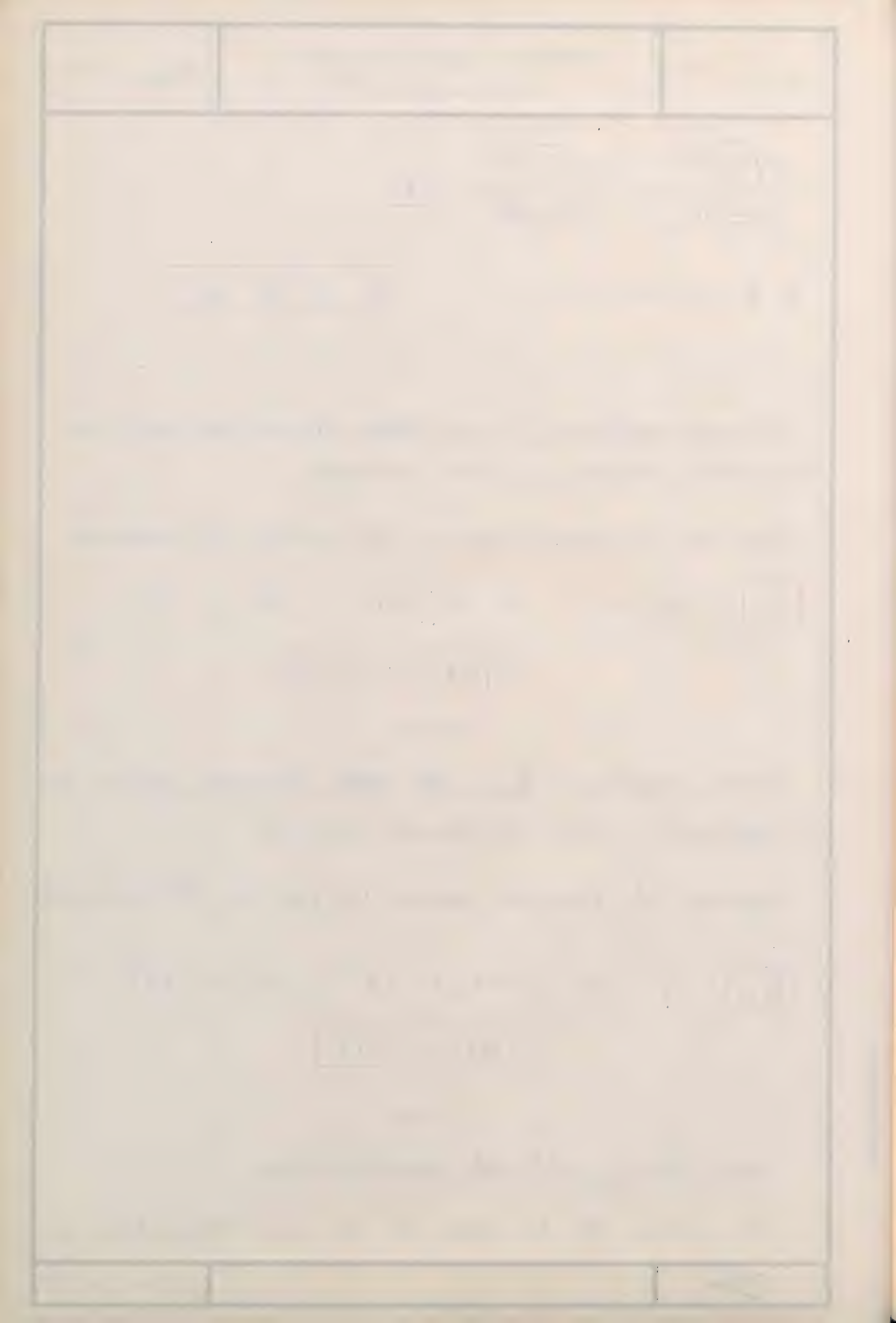
Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{4-5}} = \alpha_4 + \alpha_5 = 76°\ 43'\ 2,9'' + 71°\ 33'\ 54,2'' =$$

$$= \boxed{148°\ 16'\ 57,1''}$$

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de 20 caras triangulares re-



gulares. 30 caras cuadradas y 12 caras pentagonales regulares, todas de lado "l"; la superficie será pues:

$$\boxed{S} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 + 30 l^2 + 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} l^2 = \boxed{\left(5\sqrt{3} + 30 + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right) \times l^2}$$

$$= (8,66\,02\,54\,1 + 30 + 20,64\,57\,28\,8) l^2 = 59,\,30\,59\,82\,9 \ldots l^2$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 20 pirámides de base triangular regular y altura "c_3"; de 30 pirámides de base cuadrada y altura "c_4"; y finalmente de 12 pirámides de base pentagonal regular y altura "c_5"; su volumen será pues:

$$\boxed{V} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \times \frac{c_3}{3} + 30 l^2 \times \frac{c_4}{3} + 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} l^2 \times \frac{c_5}{3} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3} l^2 \times \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{6} l + 10 l^2 \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) l + \sqrt{25+10\sqrt{5}}\, l^2 \times \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l =$$

$$= \frac{5}{18}\left(2\sqrt{45} + 9\right) l^3 + \left(10 + 5\sqrt{5}\right) l^3 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \times \left(25+10\sqrt{5}\right)}\; l^3 =$$

$$= \frac{5}{6}\left(2\sqrt{5} + 3\right) l^3 + \left(10 + 5\sqrt{5}\right) l^3 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \times \left(5+2\sqrt{5}\right) \times 5}\; l^3 =$$

$$= \frac{5}{6}\left(2\sqrt{5}+3\right) l^3 + \left(10 + 5\sqrt{5}\right) l^3 + \frac{3}{2} \times \left(5 + 2\sqrt{5}\right) l^3 =$$

$$= \frac{5\left(2\sqrt{5}+3\right) + 6 \times \left(10+5\sqrt{5}\right) + 9\left(5+2\sqrt{5}\right)}{6} l^3 = \frac{10\sqrt{5} + 15 + 60 + 30\sqrt{5} + 45 + 18\sqrt{5}}{6} l^3 =$$



$$= \frac{120 + 58\sqrt{5}}{6}\, l^3 = \left(20 + \frac{29\sqrt{5}}{3}\right) l^3 = 41,61\,53\,23\,78\ldots\, l^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 20 triángulos equiláteros de lado 34,6 mm; de 30 cuadrados y 12 pentágonos regulares también de igual lado. El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran 1 triángulo, 2 cuadrados y 1 en pentágono, estando alternados los cuadrados. ($P_3 - P_4 - P_5 - P_4$).

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados analíticos obtenidos anteriormente.



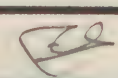
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\ \ell$	$2{,}23\ 29\ 51\ldots\ \ell$
b	$\frac{1}{2}\sqrt{10+4\sqrt{5}}\ \ell$	$2{,}17\ 62\ 51\ldots\ \ell$
c_3	$\frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{6}\ \ell$	$2{,}15\ 70\ 20\ldots\ \ell$
c_4	$1+\frac{\sqrt{5}}{2}\ \ell$	$2{,}11\ 80\ 34\ldots\ \ell$
c_5	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ \ell$	$2{,}06\ 45\ 73\ldots\ \ell$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	$0{,}57\ 73\ 50\ldots\ \ell$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	$0{,}70\ 71\ 07\ldots\ \ell$
d_5	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$0{,}85\ 06\ 57\ldots\ \ell$
m	$\sqrt{\frac{30+4\sqrt{5}}{41}}\ \ell$	$0{,}97\ 46\ 08\ldots\ \ell$
α_3	$tg\ \alpha_3 = 2\sqrt{5}+3$	$tg.\ \alpha_3 = 7{,}47\ 21\ 36\ldots$ $\alpha_3 = 82°\ 22'\ 38{,}5''$
α_4	$tg\ \alpha_4 = 2+\sqrt{5}$	$tg\ \alpha_4 = 4{,}23\ 60\ 68\ldots$ $\alpha_4 = 76°\ 43'\ 2{,}9''$
α_5	$tg\ \alpha_5 = 3$	$tg\ \alpha_5 = 3$ $\alpha_5 = 71°\ 33'\ 54{,}2''$
φ_{3-4}	$tg\ \varphi_{3-4} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ *	$tg\ \varphi_{3-4} = -0{,}38\ 19\ 66\ldots$ $\varphi_{34} = 159°\ 5'\ 41{,}4''$
φ_{4-5}	$tg\ \varphi_{4-5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **	$tg\ \varphi_{4-10} = -0{,}61\ 80\ 34\ldots$ $\varphi_{4-5} = 148°\ 16'\ 57{,}1''$
S	$(5\sqrt{3}+30+3\sqrt{25+10\sqrt{5}})\ \ell^2$	$59{,}30\ 59\ 83\ldots\ \ell^2$
V	$\left(20+\frac{29\sqrt{5}}{3}\right)\ \ell^3$	$41{,}61\ 53\ 24\ldots\ \ell^3$

* Ver cálculo Lám. 44, hoja 12 (reverso)

** Ver cálculo Lám. 44, hoja 14 (reverso)

UNE A4 210 X 297





PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 38, a la representación gráfica del arquimediano VI.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementarias cuyo cálculo efectuaremos posteriormente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado "l_{VI}" del arquimediano, cuya longitud es de 24,6 mm.

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{VI} = Dato del ejercicio = 24.6 mm

d = 2, 23 29 51... x 24,6 = 55,0 mm

b = 2, 17 62 51... x 24,6 = 53.6 mm

c_3 = 2, 15 70 20... x 24.6 = 53.1 mm

c_4 = 2, 11 80 34... x 24.6 = 52.2 mm

c_5 = 2, 06 45 73... x 24,6 = 50,8 mm

d_3 = 0, 57 73 50... x 24,6 = 14,2 mm

d_4 = 0, 70 71 07... x 24,6 = 17,4 mm

d_5 = 0, 85 06 51... x 24,6 = 21,0 mm

Antes de proceder al trazado gráfico, observemos en la lámina 38 que la proyección del arquimediano, en el plano II, presenta una forma muy regular que permite obtener directamente dicha proyección.

Las propiedades geométricas de ella son:

UNE A4 210 X 297



1) Las caras 1 al 5 y 56 al 60, son pentágonos regulares de vértices alternados, centro en O y lado "l".

2) Los vértices 6 al 15 y 46 al 55 son vértices de un decágono regular de centro en O y lado "l"

3) Los vértices 26 al 35 son vértices de un decágono regular de cuyo lado y radio de su circunferencia circunscrita calcularemos posteriormente.

Teniendo presente lo expuesto, el orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 38), es el siguiente:

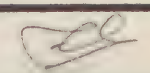
1º Situar el centro O, de coordenadas 72, 72, 85 mm

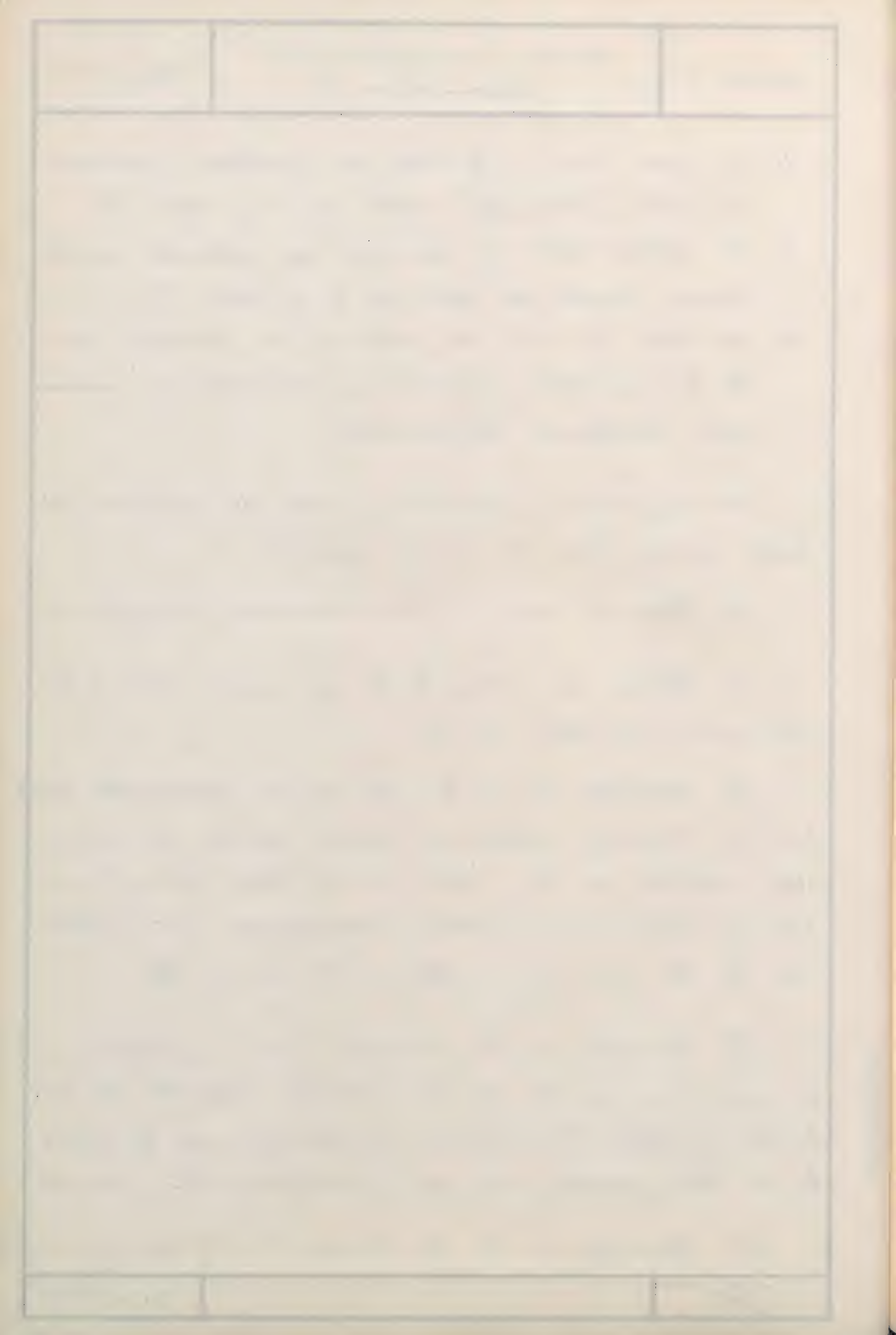
2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio 55 mm.

3º Representar en I, II y III las caras pentagonales opuestas 1 al 5 y 56 al 60, supuesto el poliedro colocado con dichas caras paralelas a II y uno de sus lados (3-4 en la superior, y 59-60 en la inferior) perpendicular a I (utilícese la cota "c_5" en I y III, y la "d_5" en II).

4º Representar en II los vértices 6 al 15 y 46 al 55, que son a su vez los de un decágono regular de centro en O, y lado "l" (utilícese el radio r_1), con la mitad de sus lados paralelos a los de los pentágonos 1 al 5 y 56 al 60.

5º Representar en II los vértices 26 al 35 que son a





su vez los de un decágono regular de centro en O y radio "r_3" (sensiblemente igual al "a"), colocándo sus lados perpendiculares a las bisectrices de los ángulos del decágono 6 al 15 ya trazado.

Con las operaciones 3ª a 5ª quedan representados en II todos los vértices del arquimediano que se numerarán y unirán entre sí en el orden que se indica en la lámina. Para obtener en I las proyecciones de los vértices que faltan (ya hemos situados los 1 al 5 y 56 al 60), bastará determinar previamente las alturas a que se encuentran con respecto al centro O; dichas alturas vienen dadas por las magnitudes "f_1", "f_2" y "f_3", o por las "g_1", "g_2" y "g_3", cuyos valores obtendremos posteriormente; trazando rectas paralelas a I y II, a las distancias anteriores, puede completarse fácilmente la proyección total en I, valiéndose de las proyecciones en II.

Conocidas las proyecciones en I y II, la de la III es inmediata y no necesita explicación.

Como comprobación y necesaria ayuda para el trazado gráfico dado anteriormente, vamos a determinar analíticamente las siguientes magnitudes complementarias que darán mayor exactitud a dicho trazado

Altura "n" de una cara triangular

UNE A4 210 X 297



Se demuestra en geometría es

$$\boxed{n = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l} = 0,86\ 60\ 25\ 4 \ldots\ l$$

Apotema "k" de una cara pentagonal

Se demuestra en geometría es (ver lám. 4, form. 39)

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\, l} = 0,68\ 81\ 91\ 0 \ldots\ l$$

Distancia "g_1" de los vértices 6 al 15 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 46 al 55 a la cara pentagonal 56 al 60.

Considerando en I la cara pentagonal 1 al 5 y la contigua cuadrada 3-4-12-13, que forman entre sí el ángulo φ_{4-5} ya conocido, y cuyos respectivos planos son perpendiculares a 5, se deduce que la altura "g_1" buscada es la proyección sobre III del eje de la cara cuadrada, siendo el ángulo de proyección

$$\varphi_{4-5} - 90^\circ = 148^\circ\ 16'\ 57{,}1'' - 90^\circ = 58^\circ\ 16'\ 57{,}1''$$ de donde

$$g_1 = \cos 58^\circ\ 16'\ 57{,}1'' \times l = 0,52\ 57\ 31\ 1 \ldots\ l$$

Desarrollo del cálculo anterior:



$$lg.\ \cos 58^\circ\ 16'\ 57{,}1'' = \bar{1}{,}72\ 07\ 63\ 7 = lg\ 0{,}52\ 57\ 31\ 1 \ldots$$

$$\boxed{\cos 58^\circ\ 16'\ 57{,}1'' = 0{,}52\ 57\ 31\ 1 \ldots}$$

Este valor se puede obtener exactamente, mediante el cálculo trigonométrico de los ángulos que intervienen, cuyos valores hemos deducido anteriormente, y cuyo cálculo desarrollamos a continuación.

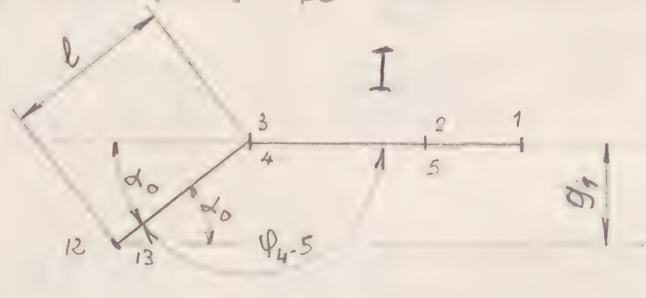


Figura 2

Sea (fig. 2) la proyección parcial en I del arquimediano VI, que comprende la cara pentagonal 1 al 5 y la contigua cuadrada 3-4-12-13 que forman entre sí el ángulo $\varphi_{4\text{-}5}$, siendo α_0 el ángulo suplementario del $\varphi_{4\text{-}5}$. La magnitud de la cota "g_1" buscada, será pues

$$g_1 = l \operatorname{sen} \alpha_0 \qquad [1]$$

pero siendo $\varphi_{4\text{-}5} = \alpha_4 + \alpha_5$ y $\operatorname{tg} \alpha_4 = 2 + \sqrt{5}$; $\operatorname{tg} \alpha_5 = 3$

tendremos

$$\operatorname{tg} \varphi_{4\text{-}5} = \operatorname{tg}(\alpha_4 + \alpha_5) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_4 + \operatorname{tg}\alpha_5}{1 - \operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_5} = \frac{(2+\sqrt{5}) + 3}{1 - (2+\sqrt{5})\times 3} =$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{1-6-3\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{-5-3\sqrt{5}} = -\frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} = -\frac{(5+\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)}{45-25} = -\frac{15\sqrt{5}+15-25-5\sqrt{5}}{20} =$$

$$= -\frac{10\sqrt{5}-10}{20} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

y de aquí se deduce, siendo



$\alpha_0 = \pi - \varphi_{4-5}$; por lo tanto $tg\ \alpha_0 = -\, tg\ \varphi_{4-5}$. que

$tg\ \alpha_0 = -\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y por consiguiente

$$\boxed{sen\ \alpha_0} = \frac{tg\ \alpha_0}{\sqrt{1+tg^2\ \alpha_0}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{1+\frac{5+1-2\sqrt{5}}{4}}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 : \frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} : \frac{10-2\sqrt{5}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{25-5}} = \sqrt{\frac{15-5\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{20}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{20}} = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}$$ valor que sustituido en [1], nos da

$$\boxed{g_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times l} = 0,52\ 57\ 31\ 1\ldots\ l$$

cuyo valor numérico aproximado es coincidente con el obtenido anteriormente.

Para el caso del dibujo, será: $g_1 = 0,52\ 57\ 31\ 1\ldots \times 24,63 = 12,9$ m m.

Distancia "f_1" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 6 al 15 y 46 al 55 respectivamente



Se obtiene por diferencia de las alturas "c_5" y "g_1", ya calculadas.

Se puede simplificar más

$$\boxed{f_1} = 2\,(c_5 - g_1) = 2 \times \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right) \ell = \boxed{\left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right)\ell} =$$

$$= 2 \times \left(2{,}06\,45\,72\,9\ldots - 0{,}52\,57\,31\,1\ldots \right) \ell = 3{,}07\,76\,83\,6\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $f_1 = 3{,}07\,76\,83\,6\ldots \times 24{,}63 = 75{,}8$

(véase simplificación al dorso

Radio "r_1" de la circunferencia circunscrita al decágono regular de lado "ℓ" y vértices 6 al 15 (ó 46 al 55)

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{r_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell} = 1{,}61\,80\,33\,99\ldots\,\ell$$

Este mismo valor se puede deducir de los ya calculados anteriormente, considerando que "r_1" es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_1}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r_1} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{2}\,\ell\right)^2 - \left[\frac{3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{2} \times \ell\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{9 \times \frac{5+2\sqrt{5}}{5} + 4 \times \frac{5-\sqrt{5}}{10} - 12\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \left(\frac{45+18\sqrt{5}}{20} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} - 3\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{50}} \right)} \times \ell =$$

$$\left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\ell = \sqrt{\left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{9\times\frac{5+2\sqrt{5}}{5} + 4\times\frac{5-\sqrt{5}}{10} - 12\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{45+18\sqrt{5}}{5} + \frac{10-2\sqrt{5}}{5} - 12\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{50}}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{45+18\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{5} - 12\sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{50}}} \times \ell = \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - 12\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{10}}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{10}}\times\sqrt{3+\sqrt{5}}} \times \ell = \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{10}}\times\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - 12\times\sqrt{\frac{5}{20}} - 12\sqrt{\frac{1}{20}}} \times \ell = \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - \frac{12}{2} - \frac{12}{2\sqrt{5}}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - 6 - \frac{6\sqrt{5}}{5}} \times \ell = \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}-30-6\sqrt{5}}{5}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}}{5}} \times \ell = \boxed{\sqrt{5+2\sqrt{5}} \times \ell} = 3{,}07\,76\,83\,53\ldots\,\ell$$

$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{45+18\sqrt{5}}{20} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{55+20\sqrt{5}}{20} - \frac{45+18\sqrt{5}}{20} - \frac{10-2\sqrt{5}}{20} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{55+20\sqrt{5}-45-18\sqrt{5}-10+2\sqrt{5}}{20} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{5(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{4\sqrt{5}}{20} + \frac{3}{5} \times \sqrt{\frac{5}{2}} \times \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}} \times l = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}+15+3\sqrt{5}}{10}} \times l = \sqrt{\frac{5\sqrt{5}+15}{10}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}\, l = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\, l = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \times l = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2} \times l}$$

valor coincidente con el del radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular de lado "l" que, como indicamos al principio, se demuestra en Geometría.

Para el caso del dibujo, será: $r_1 = 1,61\ 80\ 34... \times 24,63 = 39,9$ mm.

<u>Distancia "g_2" de los vértices 16 al 25 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 36 al 45 a la cara pentagonal 56 al 60</u>

Refiriéndonos a la lámina 38, vemos que la cara pentagonal 12-13-24-30-23, contigua a la cuadrada 3-4-13-12, están proyectadas ambas sobre I, según líneas rectas,





por ser sus respectivos planos perpendiculares a I, por lo que la arista común 12-13, intersección de dichas caras, también es perpendicular a I.

En la figura 3 representamos el contorno del arquimediano en dicha cara, que incluye el representado

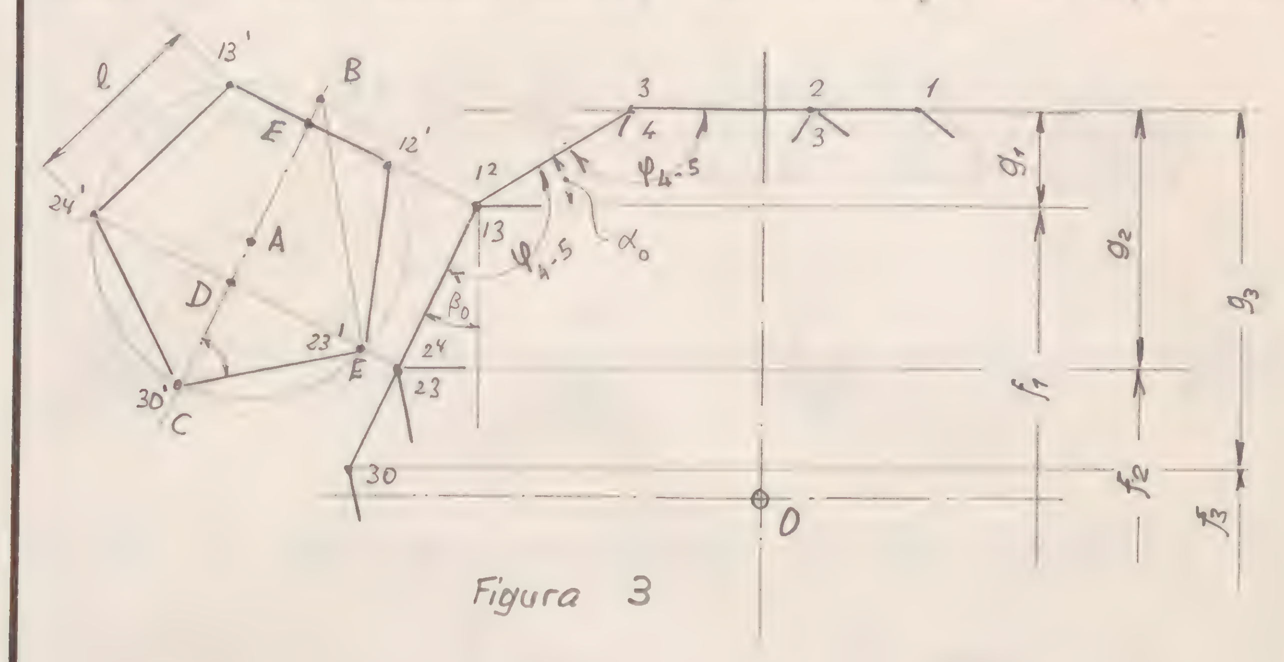


Figura 3

en la figura 2. La cara cuadrada 3-4-13-12, tiene contiguas las caras pentagonales 1 al 5 por la parte superior, y 12-13-24-30-23 por la inferior; esta última la hemos representado también abatida sobre el plano del dibujo (parte izquierda de la figura)

De la figura se deduce:

$$\varphi_{4-5} - \alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \beta_0 \qquad [1]$$

siendo "β_0" el ángulo de proyección sobre III de la cara pentagonal 12-13-24-30-23.

De la [1] se deduce:





$$tg\left(\varphi_{4-5} - \alpha_0\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} + \beta_0\right) = -ctg\,\beta_0 \qquad [2]$$

pero ya hemos deducido en el cálculo de "g_1" que

$$tg\,\varphi_{4-5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad y \qquad tg\,\alpha_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

por lo que

$$tg\left(\varphi_{4-5} - \alpha_0\right) = \frac{tg\,\varphi_{4-5} - tg\,\alpha_0}{1 + tg\,\varphi_{4-5}\;tg\,\alpha_0} = \frac{-\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1 + \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{-\left(\sqrt{5}-1\right)}{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} - 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{1-\sqrt{5}} = -\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5}-1} =$$

$= -2$ valor que sustituido en [2] nos da

$-2 = -ctg\,\beta_0 \;\therefore\; ctg\,\beta_0 = 2$ y de aquí

$$tg\,\beta_0 = \frac{1}{2} \qquad [3]$$

de esta última se deduce:

$$\boxed{\cos\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\beta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \qquad [4]$$

Por otra parte, en la cara pentagonal 12'-13'-24'-30'-23', abatida en la parte izquierda de la fig. 3, tendremos:

$\overline{CE}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ (el triángulo C-E-B es rectángulo, inscrito en la circunferencia de radio C-A); de donde



$$\overline{CD} \times \overline{CB} = \overline{CE}^2 \quad \therefore \quad \boxed{\overline{CD}} = \frac{\overline{CE}^2}{\overline{CB}} = \frac{l^2}{2\, d_5} = \frac{l^2}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times l} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{4\times(5+\sqrt{5})}{10}}} \times l = \frac{1}{\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}}\, l = \sqrt{\frac{5}{2\times(5+\sqrt{5})}} \times l = \sqrt{\frac{5(5-\sqrt{5})}{2\times 20}}\, l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\, l}$$

Pero por otra parte tenemos:

$$\boxed{\overline{DE}} = \overline{CE} - \overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AE} - \overline{CD} = d_5 + k - \overline{CD} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l -$$

$$- \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\, l = \left[\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right) + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l =$$

$$= \left[\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)^2} + \sqrt{\frac{5+3\sqrt{5}}{20}}\right] \times l = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5-\sqrt{5}}{8} - 2\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{5-\sqrt{5}}{8}}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{5+3\sqrt{5}}{20}}\right] \times l = \left[\sqrt{\frac{20+4\sqrt{5}+25-5\sqrt{5}}{40} - 2\times\sqrt{\frac{20}{80}}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{45-\sqrt{5}}{40} - 1} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l = \left[\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right)^2} \times l = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40} + \frac{5+2\sqrt{5}}{20} + 2\times\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{40\times 20}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}+10+4\sqrt{5}}{40} + \sqrt{\frac{25-5\sqrt{5}+10\sqrt{5}-10}{10\times 20}}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{200}}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{40}}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{10}}}\, l$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \frac{\sqrt{\frac{50}{2}} + \sqrt{\frac{10}{2}}}{20}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \frac{5+\sqrt{5}}{20}}\, l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}}{40}}\, l =$$



$$= \sqrt{\frac{25 + 5\sqrt{5}}{40}} \cdot \ell = \boxed{\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \cdot \ell}$$

Finalmente de la figura 3, se deduce que

$$\boxed{g_2} = \overline{DE} \cos \beta_0 + g_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\, \ell \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, \ell =$$

$$= \left(\frac{2}{5} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8} \times 5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right) \cdot \ell = \left(\frac{1}{5} \sqrt{\frac{5(5+\sqrt{5})}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right) \cdot \ell =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right) \ell = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} + 2 \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{10}{10} + 2\sqrt{\frac{20}{100}}} \cdot \ell =$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{\frac{80}{100}}} \cdot \ell = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{4}{5}}}\, \ell = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}\, \ell = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}\, \ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\, \ell} = 1{,}37\,63\,81\,9 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $g_2 = 1{,}37\,63\,81\,9 \ldots \times 24{,}63 = 33{,}9$ mm

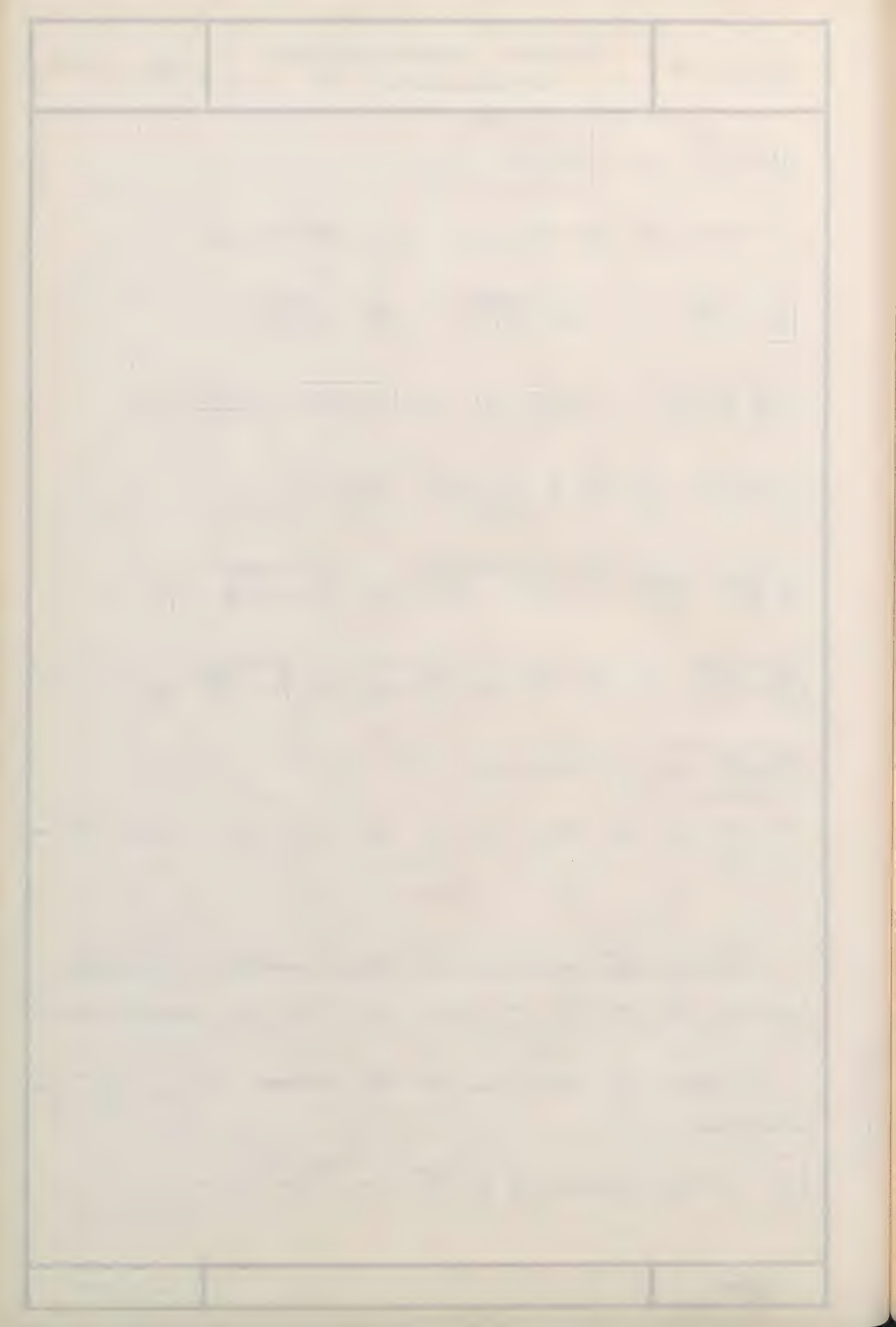
---

Distancia "f_2" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 16 al 25 y 36 al 45, respectivamente

Se obtiene por diferencias de las alturas "c_5" y "g_2", ya calculadas.

$$\boxed{f_2} = 2\,(c_5 - g_2) = 2 \times \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\, \ell - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\, \ell \right) =$$

UNE A4 210 X 297



$$= \left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell = g_2} = 1,37\ 63\ 81\ 9\ldots\ \ell$$

El cálculo anterior nos demuestra que

$$\boxed{g_2 = f_2}$$

<u>Radio "r_2" de la circunferencia circunscrita al polígono que tiene por vértices 16 al 25 y también a los 36 al 45.</u>

Dicho radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto es "$\frac{f_2}{2}$" (ver lám. 38), de valores ya calculados.

$$\boxed{r_3} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{2}\,\ell\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}\times\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell = \sqrt{\frac{55+20\sqrt{5}-5-2\sqrt{5}}{20}}\,\ell = \sqrt{\frac{50+18\sqrt{5}}{20}}\,\ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{25+9\sqrt{5}}{10}}\,\ell} = 2,12\ 42\ 55\ 44\ldots\ \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $r_2 = 2,12\ 42\ 55\ 44 \times 24,63 = 52,3$ mm

---

<u>Distancia "g_3" de los vértices 26 al 30 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 31 al 35 a la cara pentagonal 56 al 60.</u>

En la determinación de los valores "g_3", "f_3" y "r_3",



seguiremos el mismo proceso que para los correspondientes "g_2", "β" y "r_2", ya calculados, y con las mismas referencias a la figura 3. De ésta se deduce que:

$$\boxed{g_3} = \overline{CE} \cos\beta_0 + g_1 = (d_5 + k)\cos\beta_0 + g_1 =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,l + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,l\right] \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,l = \left(\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\times 5} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\times 5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\times l = \left(\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) l =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\sqrt{2(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) l = \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5} + \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) l$$

$$= \left[\frac{1}{5}\times\sqrt{\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)^2} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right]\times l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{10+2\sqrt{5}+5+2\sqrt{5}+2\sqrt{(10+2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt{5}+2\sqrt{50+10\sqrt{5}+20\sqrt{5}+20}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] l =$$

$$= \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt{5}+2\sqrt{70+30\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt{5}+2\sqrt{10}\times\sqrt{7+3\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] l =$$

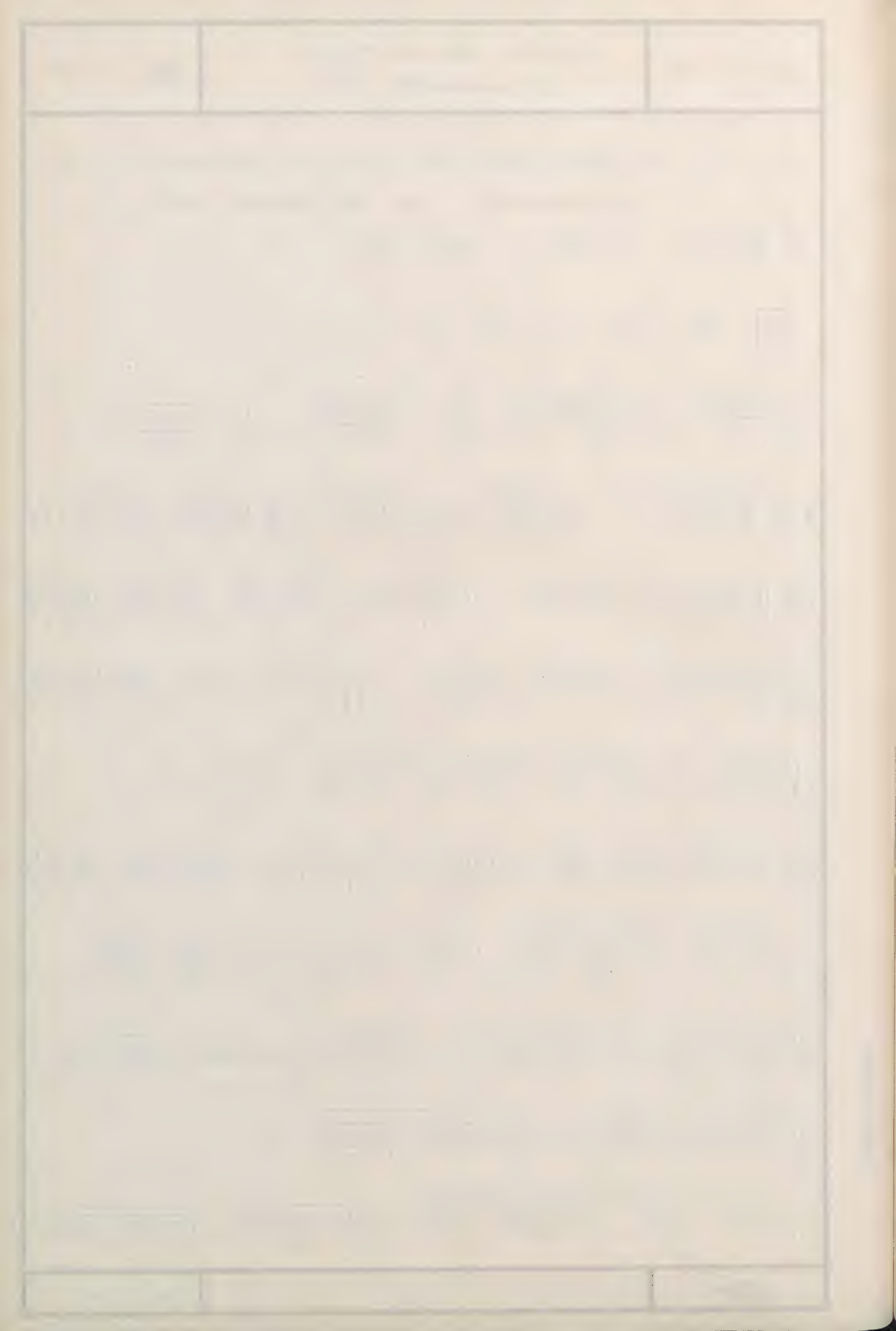
$$= \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt{5}+2\sqrt{10}\times\left(\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right]\times l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt{5}+2\sqrt{\frac{90}{2}}+2\sqrt{\frac{50}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right]\times l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt{5}+6\sqrt{5}+10} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right]\times l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] l =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] l = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2}\times l =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} + 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}\times l = \sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}+5-\sqrt{5}}{10} + 2\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{50}}}\times l =$$

UNE A4 210 X 297



$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + 2\sqrt{\frac{15+5\sqrt5}{50}}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \sqrt{\frac{60+20\sqrt5}{50}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \sqrt{\frac{6+2\sqrt5}{5}}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{3+\sqrt5}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \sqrt{\frac{10}{10}} + \sqrt{\frac{2}{10}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + 1 + \frac{\sqrt5}{5}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt5+10+2\sqrt5}{10}}\, l = \sqrt{\frac{25+5\sqrt5}{10}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}\, l} =$$

$$= 1{,}90\ 21\ 14\ 08 \ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $g_3 = 1{,}90\ 21\ 14\ 08 .. \times 24{,}63 = 46{,}8$ mm

---

Distancia "f_3" entre los planos paralelos a II, que contienen los vértices 26 al 30 y 31 al 35 respectivamente.

Se obtiene por diferencias de las alturas "c_5" y "g_3", ya calculadas.

$$\boxed{f_3} = 2\,(c_5 - g_3) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}} - \sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}\right) l =$$

$$= \left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}} - 2\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}\right) l = \sqrt{\left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}} - 2\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}\right)^2} \times l =$$

$$= \sqrt{9 \times \frac{5+2\sqrt5}{5} + 4 \times \frac{5+\sqrt5}{2} - 12 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5} \times \frac{5+\sqrt5}{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{45+18\sqrt5}{5} + 10 + 2\sqrt5 - 12\sqrt{\frac{25+10\sqrt5+5\sqrt5+10}{10}}} \times l = \sqrt{\frac{45+18\sqrt5+50+10\sqrt5}{5} - \cdots}$$



$$- 12 \sqrt{\frac{35 + 15\sqrt{5}}{10}} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5}}{5} - 12 \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \times \sqrt{7 + 3\sqrt{5}}} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5}}{5} - 12 \times \left(\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5}}{5} - 12 \times \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5}}{5} - 18 - 6\sqrt{5}} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5} - 90 - 30\sqrt{5}}{5}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} \times l} =$$

$$= 0{,}32\ 49\ 19\ 6 \ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $f_3 = 0{,}32\ 49\ 19\ 6 \ldots \times 24{,}63 = 8{,}0$ mm

---

Radio "r_3" de la circunferencia circunscrita al polígono que tiene por vértices los 26 al 35.

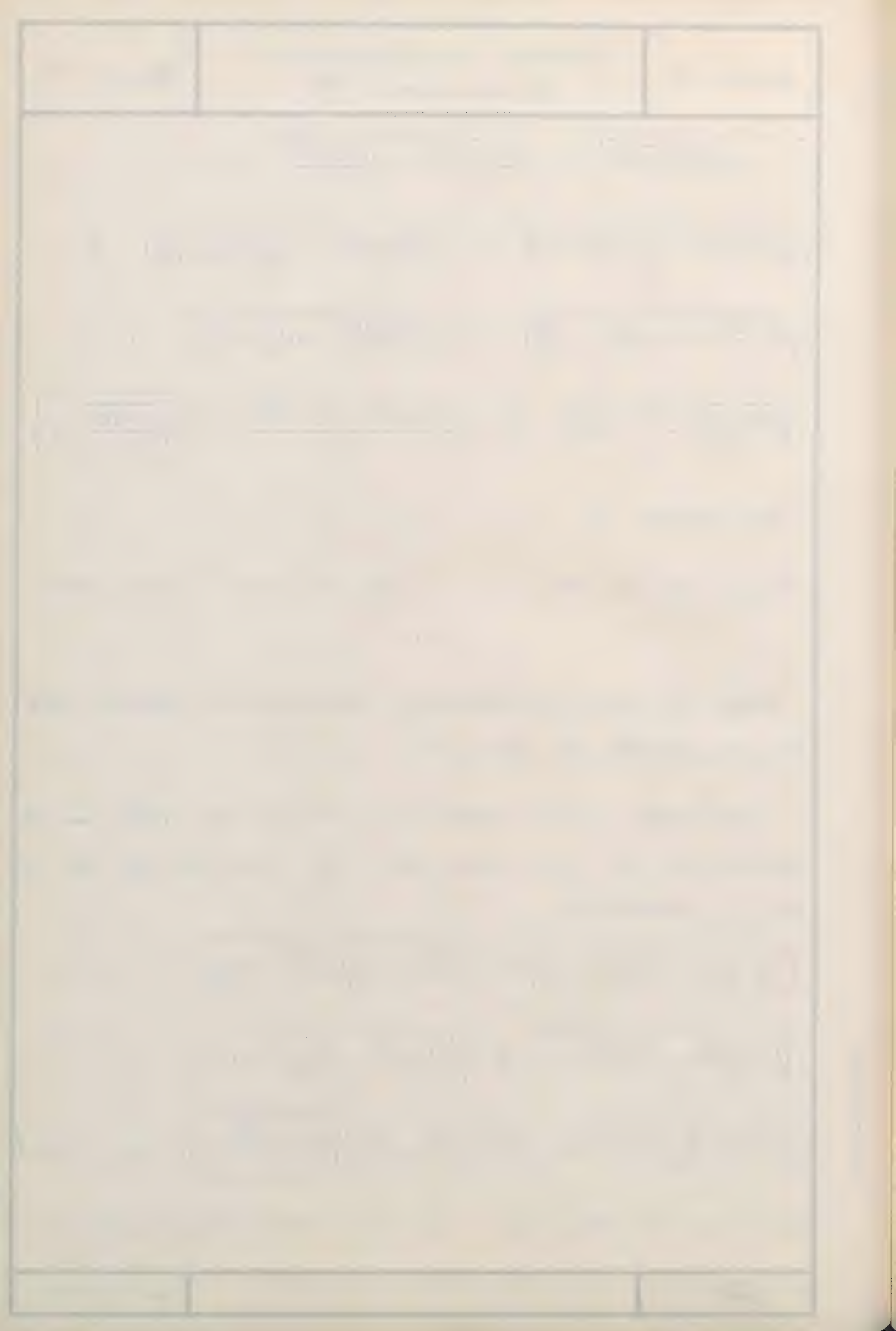
Dicho radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_3}{2}$" (ver lám. 38), de valores ya calculados.

$$\boxed{r_3} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}}{2}\, l\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}\, l : 2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt{5}}{4} - \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5} : 4} \times l = \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt{5}}{4} - \frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}}\ l =$$

$$= \sqrt{\frac{55 + 20\sqrt{5} - 5 + 2\sqrt{5}}{20}}\ l = \sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{20}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}\ l} = 2{,}22\ 70\ 32\ 73 \ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $r_3 = 2{,}22\ 70\ 32\ 73 \ldots \times 24{,}63 = 54{,}9$ mm.



En la proyección II de los vértices 26 al 35 se puede considerar que prácticamente están sobre la proyección de la esfera circunscrita al arquimediano. La diferencia de radios, en el ejemplo de la lámina es tan sólo de 0,1 mm.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados de los valores complementarios deducidos.

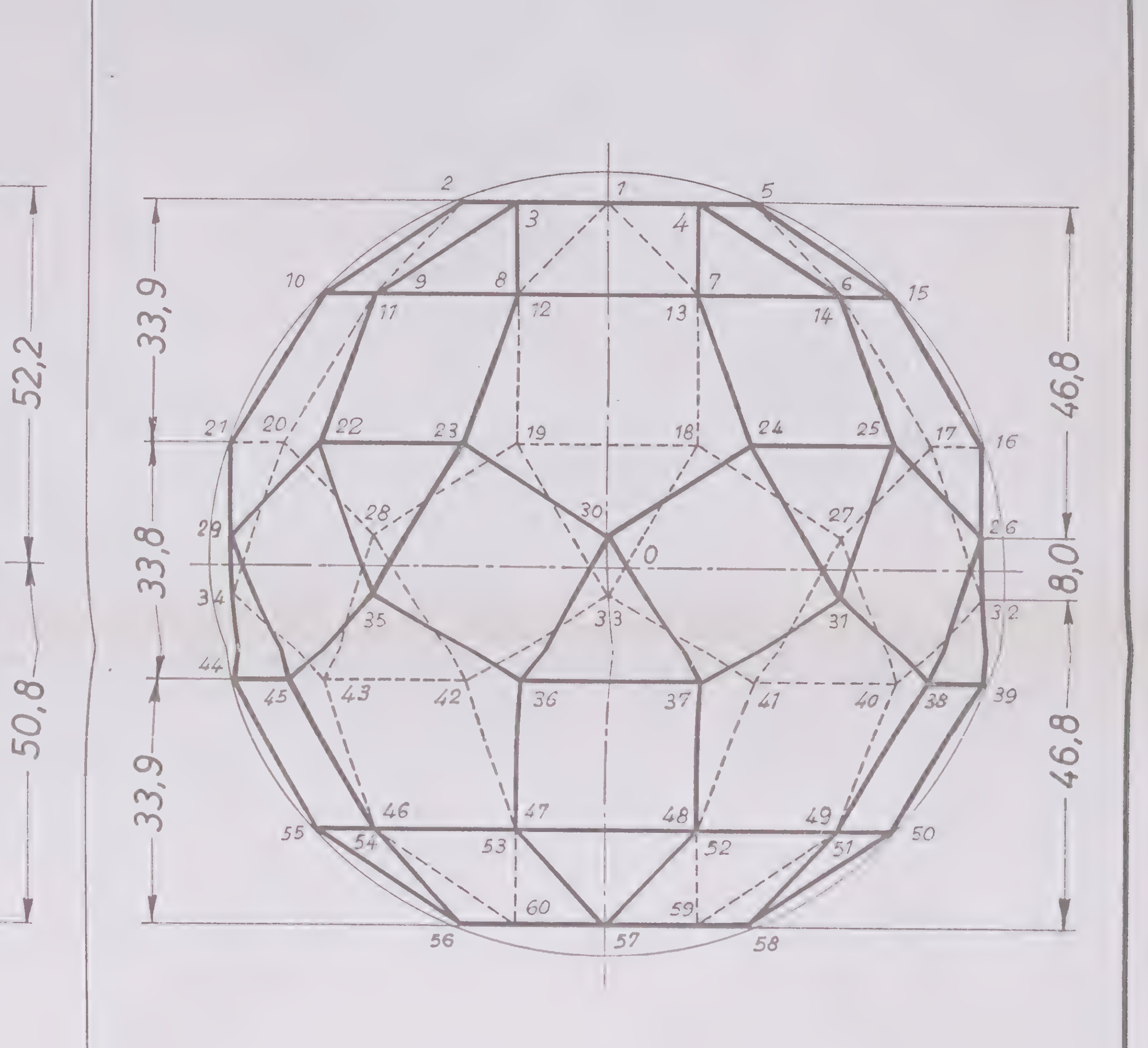
CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$	$0,86\,60\,25 \ldots \ell$
k	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell$	$0,68\,81\,91 \ldots \ell$
f_1	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\ell$	$3,07\,76\,84 \ldots \ell$
f_2	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$1,37\,63\,82 \ldots \ell$
f_3	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$0,32\,49\,20 \ldots \ell$
g_1	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,52\,57\,31 \ldots \ell$
g_2	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$1,37\,63\,82 \ldots \ell$
g_3	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,\ell$	$1,90\,21\,14 \ldots \ell$
r_1	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell$	$1,61\,80\,34 \ldots \ell$
r_2	$\sqrt{\frac{25+9\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$2,12\,42\,55 \ldots \ell$
r_3	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$2,22\,70\,33 \ldots \ell$
$f_2 = g_2 = 2k = \frac{2C_5}{3}$ (relaciones notables)		



I





II

ARQUIMEDIANO VI

Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
Número de caras cuadradas	$C_4 = 30$
Número de caras pentagonales	$C_5 = 12$
Número de vértices	$V = 60$
Número de aristas	$A = 120$
Número de caras de un ángulo sólido:	$1P_3 + 2P_4 + 1P_5$

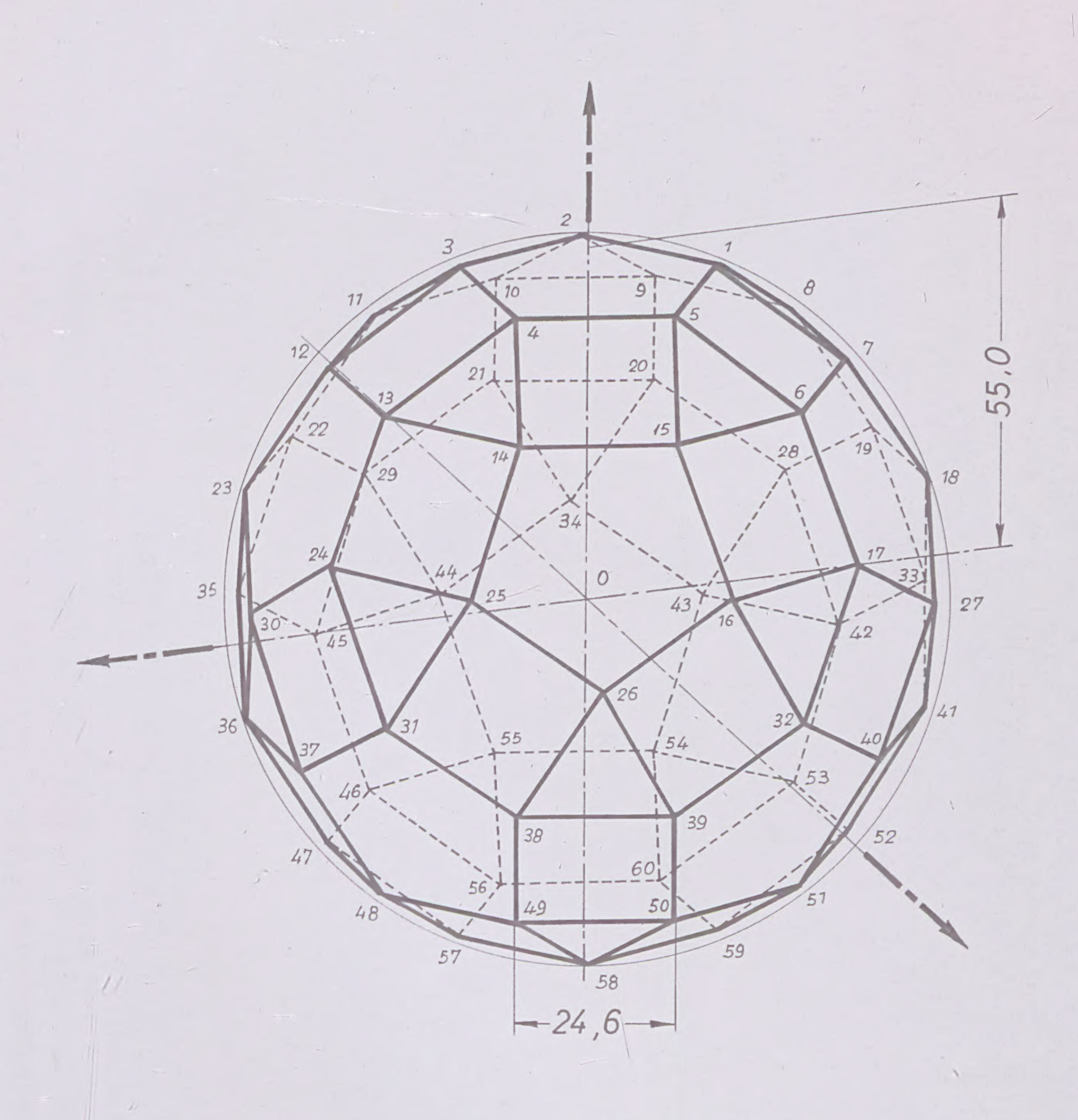
ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano VI, en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero, dos cuadrados y un pentágono.

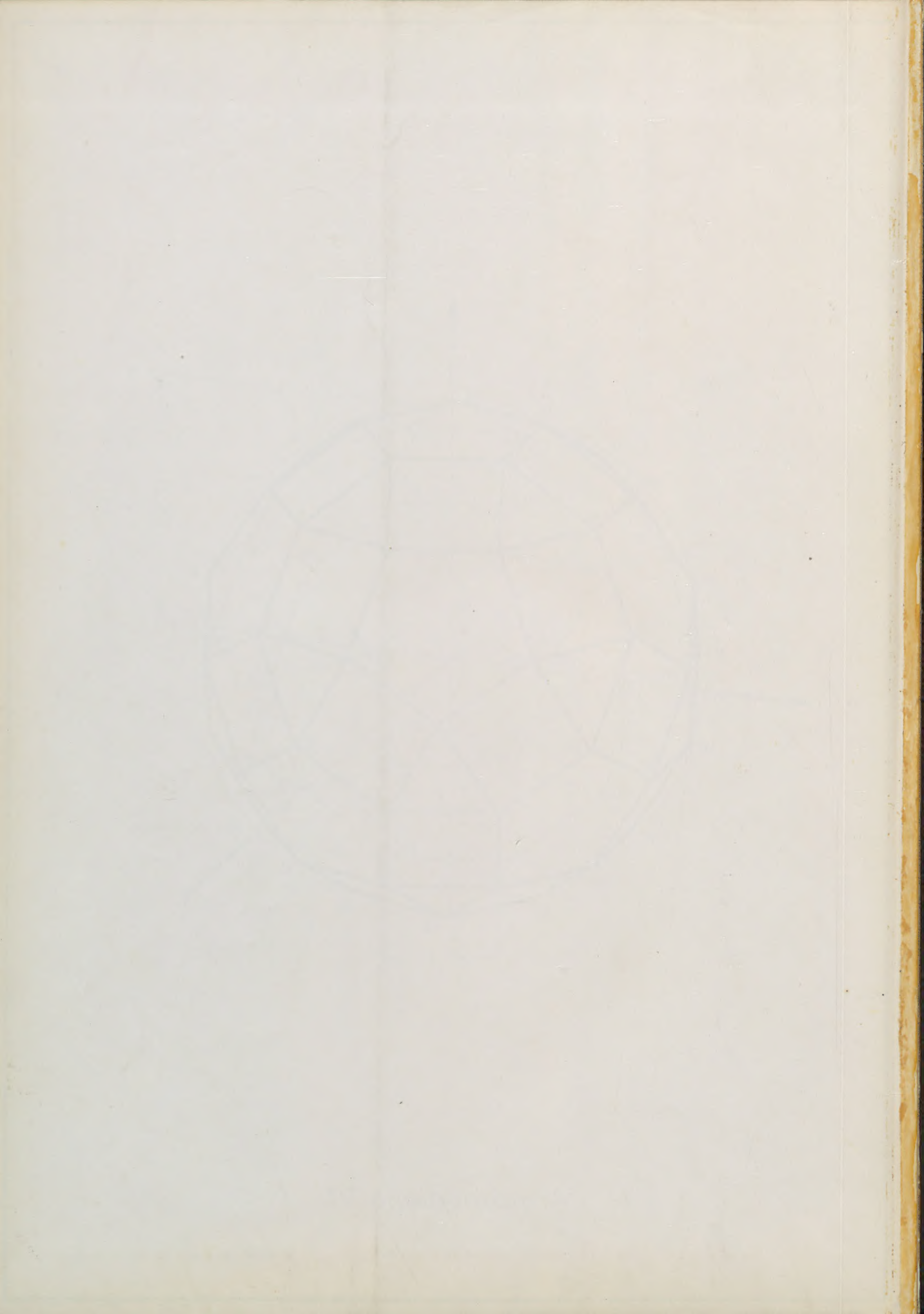
La longitud de su lado es de 24,6 milímetros, y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano VI					Lámina 38 — Curso 19 -19



Arquimediano VI



colorchecker CLASSIC

calibrite

mm